

# الكهر ومغناطيسية

د. أيمن محمد الصوالحة د. أحمد صدقي محمد يوسف

٢٠١٠م - ١٤٣١هـ

٣ جامعة الملك فيصل، ١٤٣١هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

الصوالحة، أيمن محمد

الكهرومغناطيسية / أيمن محمد الصوالحة؛ أحمد صدقي محمد يوسف

– الأحساء، ١٤٣١هـ

٣٩٧ ص، ١٧ × ٢٤ سم

ردمك : ١- ٠٨٧ - ٠٨ - ٩٩٦٠ - ٩٧٨

١- الكهرباء ٢- الكهرومغناطيسية

أ- يوسف، أحمد صدقي محمد (مؤلف مشارك) ب- العنوان

ديوي ٥٣٧ ١٤٣١/٣٠٤٩

رقم الإيداع : ١٤٣١/ ٣٠٤٩

ردمك : ١- ٠٨٧ - ٠٨ - ٩٩٦٠ - ٩٧٨

حقوق الترجمة والطبع والنشر محفوظة

لدى مركز الترجمة والتأليف والنشر - جامعة الملك فيصل

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



## المقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على رسوله محمد وعلى آله وصحبه ومن تبعه بإحسان إلى يوم الدين وبعد:

فنظراً لأهمية مادة الكهرومغناطيسية في الفيزياء وتطبيقاتها العملية، وتلبية لاحتياجات طلاب التخصص من كتاب يوضح مبادئ الكهرومغناطيسية، ولعدم توافر مراجع كافية في المكتبات باللغة العربية تساعد في تعميق هذا الموضوع. فقد قمنا بتأليف هذا الكتاب، إضافة إلى ذلك فإنه يعتبر مساهمة منا في دفع عجلة التعريب إلى الإمام، ووفاء لأبناء أمتنا الناطقين بالضاد.

يتناول الكتاب أسس الكهرومغناطيسية بشكل وافٍ، بما يتفق مع احتياجات طلبة قسم الفيزياء في كلية العلوم، وطلبة كليات الهندسة، والعلوم التطبيقية، من المستويين الثالث والرابع. ويغطي على وجه الخصوص منهاج الكهرومغناطيسية الذي يطرحه قسم الفيزياء في جامعة الملك فيصل، والجامعات الأخرى في المملكة العربية السعودية والأقطار العربية، ويخصص له ثلاث محاضرات أسبوعياً بواقع ساعة لكل منها.

وردت مادة الكتاب في ثمانية فصول موزعة بين المفاهيم المختلفة في الكهربائية والمغناطيسية. فقد تناول الفصل الأول: موضوع تأثير

---

الشحنات الكهربائية بعضها على بعض من خلال قانون كولوم، ثم من خلال مفهومي المجال الكهربائي والجهد الكهربائي، وتم عرض الطرق المختلفة لكيفية حساب المجال الكهربائي في ضوء قانون كولوم لتوزيعات مختلفة من الشحنات وصولاً إلى مفهوم التدفق وقانون جاوس والثنائي قطبان الكهربائية. أما الفصل الثاني فقد تطرق إلى حلول معادلات يواسون ولا بلاس للإحداثيات المختلفة كما تم أيضاً دراسة تأثير المجال الكهربائي على موصلات مختلفة. أما المجال الكهروستاتيكي في الأوساط العازلة فتم عرضه في الفصل الثالث حيث تمت مناقشة الشروط الحدودية المنتظمة للعوازل وصولاً إلى ما يحدث عند وضع كرة كهربائية في مجال كهربائي منتظم.

على الجانب الآخر فإن الفصل الرابع يناقش المجال المغناطيسي الناتج عن التيارات المستمرة وبعض التطبيقات عليه. أما الفصل الخامس فيناقش الخصائص المغناطيسية للمادة والحث الكهرومغناطيسي، بينما يوضح الفصل السادس الطرق المختلفة لتوصيل المحاثات. أما الفصل السابع فقد تطرق إلى الطاقة المغناطيسية لدائرة كهربائية وكثافة الطاقة في المجال المغناطيسي. أما الختام فكان من نصيب الفصل الأخير وقد نوقشت فيه معادلات ماكسويل وطرق حلها وبعض التطبيقات عليها وكذلك عرض تفصيلي لمعادلة الموجة.

# المحتويات

## الصفحة

المقدمة.....	هـ
:	
١ - الشحنة الكهربائية.....	١
٢ - قانون كولوم.....	١
٣ - تطبيق قانون كولوم للشحنات النقطية على توزيع متصل للشحنات.....	١
أولاً: لتوزيع حجمي.....	
ثانياً: لتوزيع سطحي.....	
ثالثاً: لتوزيع طولي (خطي).....	
٤ - المجال الكهربائي.....	١
٥ - خطوط القوة.....	١
٦ - الجهد الكهروستاتيكي.....	١
٧ - طاقة الوضع.....	١
٨ - الموصلات والعوازل.....	١
٩ - قانون جاوس.....	١
١٠ - تطبيقات على قانون جاوس.....	١

- 
- ١ - ١١ الثنائي قطبي الكهربائي .....
- ١ - ١٢ المجال الكهربائي  $\vec{E}$  لثنائي القطب .....
- ١ - ١٣ الجهد الكهربائي للثنائي قطبي .....
- المسائل .....

:

- ٢ - ١ مقدمة .....
- ٢ - ٢ معادلة بواسون .....
- ٢ - ٣ معادلة لابلاس .....
- ٢ - ٤ مسائل تتضمن حلول لمعادلة لابلاس .....
- ٢ - ٥ حل معادلة لابلاس في بعد واحد (متغير واحد) .....
- ٢ - ٥ - ١ في الإحداثيات الكارتيزية .....
- ٢ - ٥ - ٢ في الإحداثيات الكروية  $(\phi, \theta, r)$  .....
- ٢ - ٥ - ٣ في الإحداثيات الأسطوانية  $(r, \phi, z)$  .....
- ٢ - ٦ حل معادلة لابلاس في بعدين .....
- ٢ - ٦ - ١ في الاحداثيات الكروية  $(\phi)$  ثابت .....
- ٢ - ٦ - ٢ في نظام الإحداثيات الأسطوانية  $(z)$  ثابت .....
- ٢ - ٧ كرة موصلة غير مشحونة في مجال كهربائي منتظم .....
- ٢ - ٨ موصل اسطواني طويل في مجال كهربائي منتظم .....
- ٢ - ٩ الصور الكهروستاتيكية .....
- ٢ - ٩ - ١ حساب الشحنة التأثيرية من شحنة نقطية على موصل
- مؤرض .....



٢ - ٩ - ٢ حساب الشحنة التأثيرية على كرة موصلة مؤرضة من

شحنة نقطية .....

مسائل .....

:

١ - ٣ مقدمه .....

٢ - ٣ الاستقطاب .....

٣ - ٣ المجال الكهربائي خارج وسط عازل مستقطب .....

٤ - ٣ المجال الكهربائي داخل وسط عازل مستقطب .....

٥ - ٣ قانون غاوس في العازلات: الإزاحة الكهربائية .....

٦ - ٣ قابلية التكهرب وثابت العزل .....

٧ - ٣ شحنة نقطية في مائع (سائل) عازل .....

٨ - ٣ الشروط الحدودية على متجه المجال الكهربائي .....

٩ - ٣ مسائل القيم الحدودية المتضمنة عوازل .....

١٠ - ٣ كرة عازلة في مجال كهربائي منتظم .....

:

١ - ٤ مقدمه .....

٢ - ٤ المجال المغناطيسي .....

٣ - ٤ القوى المؤثرة في موصلات حاملة للتيار .....

٤ - ٤ قانون بيوت - سافارت .....

٥ - ٤ تطبيقات أولية على قانون بيوت - سافارت .....

- 
- ٤- ٦ ملفا هلمولتز .....  
٤- ٧ الملف اللولبي .....  
٤- ٨ قانون أمبير للدارات الكهربائية .....  
مسائل .....

:

- ٥- ١ مقدمة .....  
٥- ٢ التمغنط .....  
٥- ٣ المجال المغناطيسي الناتج عن المادة الممغنطة .....  
٥- ٤ الجهد المغناطيسي العددي وكثافة القطب المغناطيسي .....  
٥- ٥ مصادر المجال المغناطيسي: الشدة المغناطيسية ( $\vec{H}$ ) .....  
٥- ٦ معادلات المجال المغناطيسي .....  
٥- ٧ قابلية التمغنط والإنفاذية والتخلف المغناطيسي .....  
٥- ٨ تطبيق الشروط الحدودية على متجهي المجال  $\vec{B}$  و  $\vec{H}$  .....  
٥- ٩ مسائل القيم الحدودية المتضمنة مواد مغناطيسية .....  
٥- ١٠ دارات التيارات الكهربائية المحتوية على أوساط مغناطيسية ..  
٥- ١١ الدارات المغناطيسية .....  
٥- ١٢ الدارات المغناطيسية المحتوية على مغناط دائمة .....  
مسائل .....

:

- ٦- ١ المقدمة .....  
٦- ٢ الحث الكهرومغناطيسي: قانون فارادي .....

- 
- ٦- ٣ المُحَاثَةُ الذَاتِيَّة .....  
٦- ٤ المُحَاثَةُ الْمُتَبَادِلَةُ .....  
٦- ٥ صِيغَةُ نِيُومَان .....  
٦- ٦ تَوْصِيلُ الْمُحَاثَاتِ عَلَى التَّوَالِي وَعَلَى التَّوَازِي .....  
مَسَائِلُ .....

:

- ٧- ١ مُقَدِّمَةٌ .....  
٧- ٢ الطَّاقَةُ المَغْنَاطِيْسِيَّةُ لِدَارَةِ كَهْرِبَائِيَّةٍ .....  
٧- ٣ الطَّاقَةُ المَغْنَاطِيْسِيَّةُ لَعَدَدٍ مِنَ الدَّارَاتِ .....  
٧- ٤ كَثَافَةُ الطَّاقَةِ فِي المَجَالِ المَغْنَاطِيْسِيِّ .....  
٧- ٥ القُوَى وَالْعُزُومُ عَلَى الدَّارَاتِ الصَّلْبَةِ .....  
٧- ٦ فِقدَانُ الطَّاقَةِ النَّاتِجُ عَنِ التَّخَلُّفِ المَغْنَاطِيْسِيِّ .....  
مَسَائِلُ .....

:

- ٨- ١ مُقَدِّمَةٌ .....  
٨- ٢ صِيَاغَةُ عَامَّةٌ لِقَانُونِ أَمْبِيرٍ وَمَفْهُومِ تِيَارِ الإِزَاحَةِ .....  
٨- ٣ مُعَادِلَاتُ مَآكْسُوِيلِ .....  
٨- ٣ - ١ مُعَادِلَةُ مَآكْسُوِيلِ الأَوَّلِي: قَانُونُ فَرَادِي .....  
٨- ٣ - ٢ مُعَادِلَةُ مَآكْسُوِيلِ الثَّانِيَّة: قَانُونُ غَاوَس (فِي  
الكَهْرِبَاءِ) .....  
٨- ٣ - ٣ مُعَادِلَةُ مَآكْسُوِيلِ الثَّالِثَةِ: قَانُونُ أَمْبِيرِ .....

٨ -٣ -٤ معادلة ماكسويل الرابعة: قانون غاوس (في

المغناطيسية).....

٨ -٤ القدرة ومنتجه بوينتغ .....

٨ -٥ معادلة الموجة .....

٨ -٥ -١ اشتقاق معادلة الموجة بدلالة  $\bar{H}$  .....

٨ -٥ -٢ اشتقاق معادلة الموجة بدلالة  $\bar{E}$  .....

٨ -٦ الشروط الحدودية .....

٨ -٦ -١ الشرط الحدي للمجال المغناطيسي  $\bar{B}$  .....

٨ -٦ -٢ الشرط الحدي للمجال الكهربائي  $\bar{E}$  .....

٨ -٦ -٣ الشرط الحدي لمتجه الإزاحة  $\bar{D}$  .....

٨ -٦ -٤ الشرط الحدي لمتجه الشدة المغناطيسية  $\bar{H}$  .....

مسائل .....

.....

## الكهرباء الساكنة

-

لاحظ العالم تيلز عام ٦٠٠ قبل الميلاد أن قطعة من الكهرمان (Amber) تجذب إليها قطعاً من القش إذا دلكت بقطعة من الملابس وكذلك نلاحظ إن ذلك مشط بلاستيكي مع قطعة صوف تجعله يجذب قطعاً من قصاصات الورق.

وفى المثال السابق، لم يتم خلق شحنة (Charge) وإنما فصل شحنة عن أخرى بحيث يبقى مجموع الشحنة قبل الدلك وبعده ثابتاً؛ أي أن هناك قانوناً لحفظ الشحنة. والأجسام إما أن تكون مشحونة أو غير مشحونة، فإذا كانت مشحونة فإنها تكون إما موجبة أو سالبة.

تتكون المادة من ذرات أو (جزيئات) والذرات من جسيمات أصغر منها (إلكترونات وبروتونات ونيوترونات) وعندما تتكلم عن جسم مشحون فإننا معنيون بمحصلة الشحنة عليه، ومحصلة الشحنة على الجسم قد تكون موجبة وقد تكون سالبة. فالذرة في الأصل متعادلة وهي التي تكون الجسم وانتقال الإلكترونات من أو إلى الجسم هو الذي يجعل الجسم مشحوناً.

ومن خصائص الشحنة أنها دائماً محفوظة (Conserved) في نظام مغلق (Closed System) أو معزولة (Isolated) ويقصد بالنظام المعزول: النظام الذي لا يسمح بمرور أية مادة (شحنة) عبر حدوده ولكنه يسمح للضوء بالمرور من خلاله.

فمثلاً؛ لو أخذنا صندوقاً رقيقاً في الفراغ تخترقه أشعة جاما فإن هذه الأشعة تعمل على توليد إلكترون (سالب) وبوزترون (موجب) فيما يسمى الأزواج المتضادة (Pair Production) ولكن التغيير في الشحنة الكلية داخل الصندوق تساوي صفر وكذلك خارج الصندوق وبالتالي فإن الشحنة الكلية محفوظة. أما إذا حصل أن تولد جسيم موجب داخل الصندوق دون توليد جسيم سالب مساوٍ للأول في شحنته فهذا انتهاك لقانون حفظ الشحنة وهذا لم يشاهد بعد.

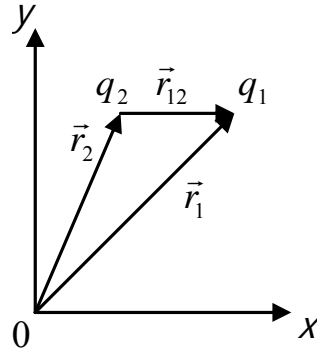
#### (Coulomb's law)

يُعطى قانون كولوم بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\vec{F}_1 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (1-1)$$

أو

$$\vec{F}_1 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (1-2)$$



الشكل رقم (1-1)

حيث إن:

$\vec{F}_1$ : القوة المؤثرة في  $q_1$  بسبب  $q_2$ .

$\vec{r}_{12}$ : متجه من الشحنة  $q_2$  إلى  $q_1$  ويساوي المسافة بين الشحنتين

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$k$ : ثابت التناسب علما بأن ثابت التناسب  $k$  مساوٍ  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  حيث يعرف  $\epsilon_0$

بثابت نفاذية الفراغ الكهربائية ويساوي  $8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2}$

أما قانون كولوم لعدد  $n$  من الشحنات النقطية فيمكن كتابته

على النحو التالي:

$$\vec{F}_i = q_i \sum_{j \neq i}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (1-3)$$

حيث:

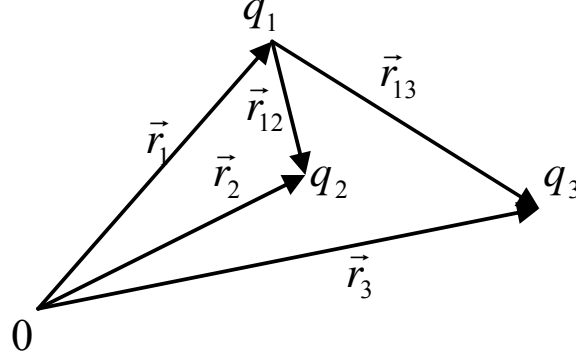
$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

لاحظ أن المجموع في المعادلة (1-3) يأخذ لجميع الشحنات ما عدا الشحنة

$i$  المراد إيجاد القوة المؤثرة فيها.

( - )

ثلاث شحنات نقطية  $q_1, q_2, q_3$  كما بالشكل رقم (٢-١) أوجد  
محصلة القوى على الشحنة  $q_1$ .



الشكل رقم (٢-١)

الحل:

نطبق المعادلة (1-3) بحيث  $i = 1, j = 2, 3$

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[ q_2 \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + q_3 \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} \right]$$

والواقع في هذا المثال والأمثلة المشابهة أننا نجد تأثير الشحنة  $q_2$  على الشحنة  $q_1$  عند وضع الشحنة  $q_3$  في اللانهاية ونجد كذلك تأثير الشحنة  $q_3$  على الشحنة  $q_1$  عند وضع الشحنة  $q_2$  في اللانهاية وبالتالي فإن محصلة القوى على الشحنة  $q_1$  هي محصلة القوتين الناتجتين عن  $q_2, q_3$  عند وضعهما في أماكنهما.



**(Volume Charge Distribution)** :

تعرف كثافة الشحنة الحجمية  $\rho$  على النحو التالي:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (1-4)$$

فإذا كانت  $\rho$  موزعة أو متجانسة خلال الحجم  $V$  فإن الشحنة تعطى بالعلاقة

$$q = \rho V$$

وتجدر الإشارة هنا إلى أن تجزئة الشحنة الكلية السابقة نتيجة تجزئ الحجم ممكن من الناحية الجاهريه (Macroscopic) نظراً لصغر حجم الشحنة (شحنة الإلكترون) البالغة  $1.6 \times 10^{-19} C$  ، وأي حجم نأخذه مهما بلغ من الصغر سيحتوي على عدد لا بأس به من الشحنات. ولكن يجب أخذ الحيطة والحذر في المسائل الذرية المجهرية (Microscopic) لأن تطبيق المعادلة (1-4) يصبح لا معنى له وقد لا يحتوي الحجم المتناهي في الصغر  $\Delta V \rightarrow 0$  أي شحنات.

**(Surface Charge Distribution)** :

تعرف كثافة الشحنة السطحية  $\sigma$  على النحو التالي:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad (1-5)$$

فإذا كانت  $\sigma$  متجانسة خلال المساحة  $S$  فإن الشحنة  $q$  تعطى بالعلاقة:

$$q = \sigma S$$

(Linear Charge Distribution) ( ) :

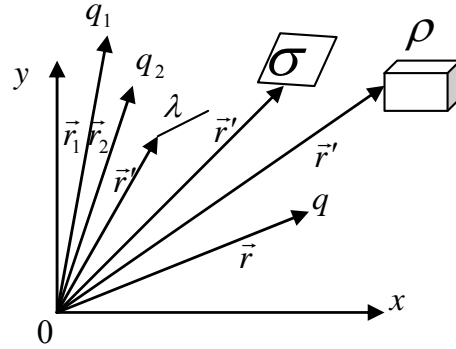
تعرف كثافة الشحنة الخطية (الطولية)  $\lambda$  على النحو التالي:

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (1-6)$$

فإذا كانت  $\lambda$  متجانسة خلال الطول  $l$  فإن الشحنة  $q$  تعطى بالعلاقة:

$$q = \lambda l$$

ولنفترض أن لدينا جميع توزيعات الشحنة سابقة الذكر كما في الشكل رقم (٣-١) فإنه بالإمكان إيجاد القوة المؤثرة في الشحنة  $q$  من جميع التوزيعات السابقة (نقطية، طولية، سطحية، حجمية) على النحو التالي:



الشكل رقم (٣-١)

$$\begin{aligned} \vec{F}_q = & \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|r-r_i|^3} (\vec{r}-\vec{r}_i) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \rho(r') dV' \\ & + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \sigma(r') da' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_\ell \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \lambda(r') d\ell' \end{aligned} \quad (1-7)$$

حيث  $\vec{r}'$  متغير استخدم لتحديد نقطة داخل توزيع الشحنات (الحجمية أو السطحية أو الطولية) وهي بمثابة  $\vec{r}$  في المعادلة (1-3).

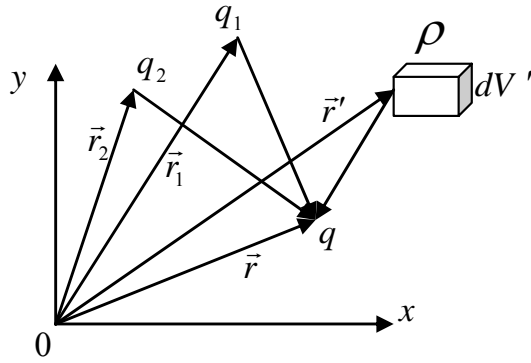
والمعادلة (1-7) هي عامة لجميع أصناف توزيع الشحنات ونقوم عادة بإهمال الحد الذي لا يمثله توزيع الشحنات.

نلاحظ من المعادلة (1-7) أن القوة المؤثرة في  $q$  تتناسب طردياً مع قيمة هذه الشحنة وهذا يمكننا من إحداث متجه جديد لا يعتمد على قيمة الشحنة  $q$  وهذا المتجه عبارة عن القوة لوحدة الشحنة ويعرف بالمجال الكهربائي  $\vec{E}$  كما سنبين لاحقاً.

( - )

أوجد القوة المؤثرة في الشحنة  $q$  للتوزيع المبين في الشكل رقم (1-1).

(٤).



الشكل (٤-١)

الحل:

نظراً لأن التوزيع حجمي ونقطي فإن:

$$\sigma = \lambda = 0$$

وبتطبيق المعادلة (٧- ١) فإن:

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ q_1 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + q_2 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_2)}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} + \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \right]$$

### (The Electric Field)

يعرف المجال الكهربائي  $\vec{E}$  عند نقطة ما بأنه القوة  $\vec{F}$  المؤثرة في شحنة اختبار  $q_0$  موضوعة في تلك النقطة مقسومة على قيمة شحنة الاختبار  $q_0$  ونظراً لأن  $\vec{F}$  متجه فإن المجال الكهربائي متجه أيضاً وتعتمد قيمته على ترتيب توزيع الشحنات وعلى موضع النقطة التي نختارها لإيجاد المجال فيها، وتسمى الشحنات  $q_1, q_2, \dots, q_n$  بمصادر المجال، ويمكن كتابة المجال الكهربائي بصيغة رياضية على النحو التالي:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

حيث  $q_0$  شحنة الاختبار و  $\vec{F}$  القوة المؤثرة على مصادر المجال. ويجب أن تكون شحنة الاختبار صغيرة وتقترب من الصفر وذلك حتى لا تؤثر شحنة الاختبار على التوزيع الذي يحدث في المجال، فمثلاً إذا كان لدينا كرة معدنية وقربنا منها شحنة اختبار كبيرة فإن الشحنة الموزعة على الكرة ستعيد توزيعها وبالتالي سيتغير المجال الناتج عنها.

والآن، لنفرض توزيع الشحنات المبين في الشكل رقم (١-٣).

ولنعبر  $q_0$  شحنة الاختبار المراد إيجاد المجال الكهربائي في موقعها (النقطة  $P$ ). وبالتالي فإن المجال الكهربائي  $\vec{E}(\vec{r})$  من المعادلة (1-7)

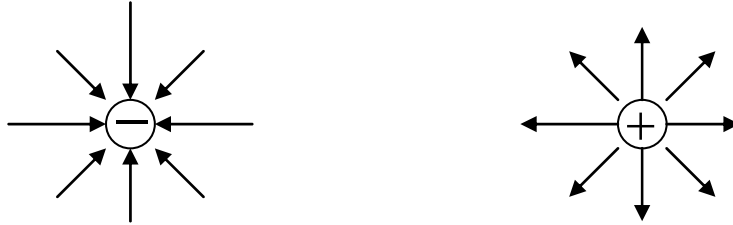
يعطى على النحو التالي:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_o} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_v \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_s \sigma(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_l \lambda(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl' \quad (1-8)\end{aligned}$$

والمعادلة (1-8) هي معادلة عامة وفي كثير من الأحيان لا نحتاج لمعظم حدودها.

### (Line of Force)

عمل فارادي على وضع مفهوم خطوط القوة كوسيلة لدراسة المجال الكهربائي لتوزيع معين من الشحنات. وهي عبارة عن خطوط (منحنيات) وهمية ترسم بطريقة بحيث يكون اتجاهها في أية نقطة هو اتجاه شحنة الاختبار الموجبة، وبالتالي فإن هذا الاتجاه سيمثل اتجاه المجال الكهربائي في تلك النقطة ويبين الشكل رقم (٥-١) خطوط القوة لعدد من الشحنات النقطية المختلفة.



الشكل رقم (٥-١): تمثيل خطوط القوة الكهربائية.

ومن صفات خطوط القوة الكهربائية:

- ١- تخرج من الشحنة الموجبة وتسقط في الشحنة السالبة.
- ٢- خطوط وهمية لا تتقاطع.
- ٣- اتجاهها هو اتجاه المجال ولذلك يطلق عليها أحيانا خطوط المجال.

-

### (The Electrostatic Potential)

يعرف الجهد في أية نقطة على أنه: الشغل اللازم لنقل وحدة الشحنة الموجبة من اللانهاية (الجهد عندها صفر) إلى تلك النقطة. وهذا الشغل المبذول لا يعتمد على المسار الذي يسلك لنقل الشحنة وعليه فإن الجهد نفسه لا يعتمد على المسار ولولا هذه الخاصية لما كانت فكرة الجهد مفيدة جداً في هذا الموضوع. ويبدل شغل عادة في نقل شحنة عندما يكون هناك مجال كهربائي، أي أن هناك علاقة دائماً بين الجهد والمجال لكن الجهد كمية عددية، بينما المجال كمية متجه. في الفصل الأول تبين أن اللف لانحدار كمية عددية يساوى صفراً،

أي أن:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0 \quad (1-9)$$

فإذا تلاشى اللف (Curl) لمتجه ما موازي، مثل  $\vec{A}$ ، فإنه بالإمكان التعبير عن ذلك المتجه بانحدار (grad) كمية عددية مثل  $\Phi$ ، أي أن:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \quad (1-10)$$

إذن:

$$\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi \quad (1-11)$$

ويمكن تطبيق ذلك على المجال الكهربائي  $\vec{E}$  في المعادلة (1-8)

على النحو التالي:

لايجاد  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  علينا أولاً إيجاد

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1-12)$$

وعلى غرار المتطابقة

$$\vec{\nabla} \times (\Phi \vec{A}) = (\vec{\nabla}\Phi) \times \vec{A} + \Phi (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

فإن:

$$\Phi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \vec{A} = \vec{r} - \vec{r}'$$

إذن:

$$\vec{\nabla} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \left( \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \times (\vec{r} - \vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} [\vec{\nabla} \times (\vec{r} - \vec{r}')] \quad (1.13)$$

ولكن

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -3 \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} \quad (1-14)$$

وكذلك

$$\vec{\nabla} \times (\vec{r} - \vec{r}') = 0 \quad (1.15)$$

وبالتعويض عن (١٤ - ١) و (١٥ - ١) في المعادلة (١٣ - ١) نجد أنه لمتجه

موازٍ:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0 \quad (1.16)$$

ومنها فإن:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (1.17)$$

وبما أن اللف (curl) للمتجه  $\vec{E}$  يساوي صفرًا فإنه بالإمكان تمثيل هذا المتجه بتدرج (انحدار gradient) على النحو التالي:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \quad (1.18)$$

حيث تعرف  $\Phi$  بالجهد الكهروستاتيكي، وتستخدم هذه المعادلة في إيجاد المجال والجهد.

وبما أن:

$$\begin{aligned} E(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned} \quad (1-19)$$

$$\therefore \Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1-20)$$

وعلى أساس المعادلة (1-20) فإنه بالإمكان إيجاد الجهد الكهروستاتيكي  $\Phi(\vec{r})$  من المعادلة (1-8) وعلى النحو التالي:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^N q_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma(\vec{r}') da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda(\vec{r}') d\ell}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1-21)$$

بيناً في المعادلة (1-18) أن المجال الكهربائي يحسب من الجهد عن طريق إيجاد التدرج للجهد. أما إيجاد الجهد الكهروستاتيكي من المجال الكهروستاتيكي فيتم بتطبيق المعادلة (1-18) وبضرب طرفيها نقطياً بالمتجه  $d\vec{r}$  نحصل على:

$$\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

وبإيجاد التكامل لطرفي هذه المعادلة فإن:



$$\int_{ref}^r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{ref}^r \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

ويتم اختيار نقطة مرجع لـ  $\Phi(\vec{r})$  في نقطة بحيث يتلاشى فيها الجهد  
وبما أن  $\Phi_{ref} = 0$ :

$$\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = d\Phi$$

$$\therefore \int_{ref}^r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{ref}^r d\Phi = -(\Phi_r - \Phi_{ref}) = -\Phi(\vec{r})$$

أي أن:

$$\Phi(\vec{r}) = - \int_{ref}^r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (1-22)$$

وتستخدم المعادلة (٢٢ - ١) في إيجاد الجهد من المجال  
الكهروستاتيكي وهي عكس المعادلة (1-18) التي استخدمت في إيجاد  
المجال من الجهد.

### (Potential Energy)

إن طاقة الوضع من المفاهيم الهامة أيضاً في هذا الموضوع ولها  
علاقة وطيدة بالقوى الكهربائية المحافضة وتعطى بالعلاقة التالية:

$$U(\vec{r}) = - \int_{ref}^r \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (1-23)$$

وتمثل المعادلة (1-23) الشغل اللازم لنقل شحنة من نقطة المرجع (ref.) إلى  
نقطة على بعد  $\vec{r}$ .

وحيث إن:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

فإن:

$$U(\vec{r}) = -q \int_{ref}^r \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = -q [-\Phi(\vec{r}')] = q\Phi(\vec{r}') \quad (1-24)$$

نلاحظ من المعادلة (1-24) أن الجهد الكهروستاتيكي عبارة عن طاقة وضع كهربائية لكل وحدة شحنة وكلاهما (الجهد والطاقة) كميات عددية.

-

يمكن تصنيف المواد إلى موصلات، وعوازل والموصلات مواد مثل المعادن تحتوي على عدد كبير من الشحنات الحرة (الالكترونات في معظم الأحيان)، وتتميز بأنها تستجيب للمجال الكهربائي، فتتحرك طالما كان هناك مجال كهربائي يؤثر عليها. وينتج عن حركة هذه الشحنات تيار كهربائي. أما العوازل فتتميز بأن شحناتها مقيدة بجزيئاتها. وهذا بالطبع لعازلات مثالية حيث لا تظهر هذه المواد أية إيصالية بوجود مجال كهربائي خارجي. أما العازلات الحقيقية فتظهر إيصالية ضعيفة جداً أصغر بحوالي  $10^{20}$  مرة من إيصالية المواد جيدة التوصيل ونظراً لأن هذه النسبة كبيرة جداً فباستطاعتنا القول بأنها عازلة.

وهناك بعض المواد مثل: شبة الموصلات لها إيصالية متوسطة وتقع عادة بين الموصلات والعازل، وحيث إن الشحنة تكون حرة الحركة في الموصلات حتى تحت تأثير مجال كهربائي ضعيف جداً. فإن حاملات الشحنة تستمر في الحركة حتى تجد هذه الشحنات مكاناً ينعدم فيه المجال (تأثير القوة) وعندها تسكن الشحنات داخل الموصل فهذا مؤشر على خلو داخل الموصل من المجال؛ وذلك نظراً لأن الشحنات لا تتراكم ولو استمر المجال لاستمرت حركة الشحنات. وبما أن:  $\vec{E} = 0$  داخل الموصل

فإن  $\nabla\Phi = 0$  أي أن الموصل يكون منطقة تساوي الجهد. وتجدر الإشارة هنا إلى أن العازل عندما يؤثر فيه مجال كهربائي خارجي فإنه خلال زمن قصير جدا يرتب نفسه داخليا بمجال كهربائي داخلي يلغي تأثير المجال الخارجي. أما المواد فائقة التوصيلية (Superconductors) فهي مواد موصلة إلا أنها لا تبدي أية مقاومة لحركة الشحنات عند درجة حرارة معينة تسمى بدرجة الحرارة الحرجة.

### (Gauss's Law)

هناك علاقة هامة بين التكامل للمركبة العمودية للمجال الكهربائي على سطح مغلق والشحنة الكلية داخل ذلك السطح. وتعرف هذه العلاقة بقانون جاوس ويكتب على الشكل التالي:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1-25)$$

حيث يمثل الطرف الأيسر للمعادلة (1-25) تدفق المجال الكهربائي  $\vec{E}$  من سطح مغلق وتمثل  $Q$  الشحنة المحتواة داخل هذا السطح، والمعادلة (1-25) تكتب على النحو التالي لتوزيع متصل من الشحنات كثافتها الحجمية  $\rho$ .

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dv \quad (1-26)$$

أما قانون جاوس لعدد  $N$  من الشحنات النقطية فيكتب على النحو التالي:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \quad (1-27)$$

ويمكن التعبير عن قانون جاوس بشكل مختلف عن السابق، وذلك باستخدام نظرية التفرق (Divergence Theorem) وهي أن استخدامها يتم للتحويل من تكامل سطحي إلى حجمي وبالعكس، أي أن:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_v \text{div } \vec{E} \, dv = \int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dv \quad (1-28)$$

وبالتعويض عن التدفق من المعادلة (1-28) في المعادلة (1-26) نحصل على:

$$\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho \, dv \quad (1-29)$$

ونظراً لأن المعادلة (1-29) صحيحة لأي حجم أو أي حجم نختار فإن:

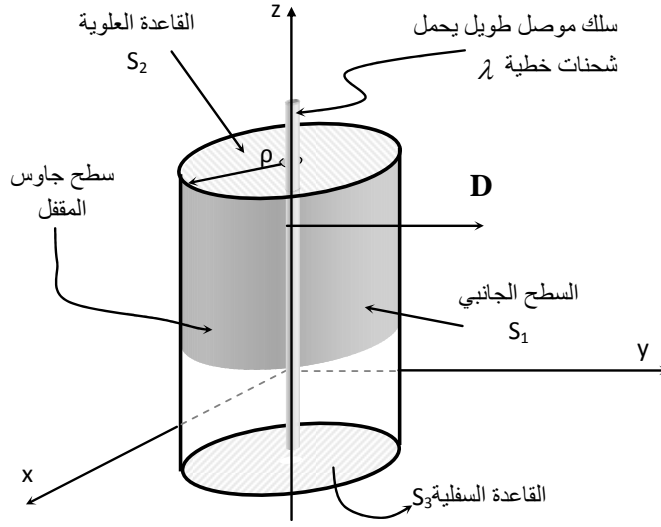
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-30)$$

وتعرف المعادلة (1-30) بأنها الشكل التفاضلي لقانون جاوس وهناك شكل آخر لهذه المعادلة سنقوم باشتقاقه فيما بعد بإذن الله.

-

إن قانون جاوس عملي جداً لإيجاد المجالات للحالات التي يكون فيها تماثل وذلك بدلاً من استخدام التكاملات المعقدة، وحتى يكون قانون جاوس مفيداً في حساب المجالات الكهربائية علينا اختيار السطح المغلق (الجاوسي) بحيث يكون التدفق منة عمودياً (أعظم ما يمكنه) أو صفراً، كما يجب اختيار السطح بحيث تكون شدة المجال عليه ثابتة. وفيما يلي بعض الأمثلة على حساب المجال الكهربائي.

: لشحنة خطية طويلة جداً كثافتها الطولية  $\lambda$ .



الشكل رقم (٦-١): سلك موصل طويل يحمل كثافة شحنات خطية  $\lambda$   $C/m$  مبيناً عليه سطح جاوس

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \lambda dl$$

ونلاحظ من التماثل في هذه الحالة أن المجال دائماً عمودي على وحدة

مساحة السطح  $S_1$  وموازي لوحدة مساحته السطحية  $S_2$ ،  $S_3$  وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} &= \int_{S_1} \vec{E}_r \cdot d\vec{a} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{a} \\ &= \int_{S_1} \vec{E}_r \cdot d\vec{a} + 0 + 0 \\ &= \int_{S_1} \vec{E}_r \cdot d\vec{a} \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{s_1} \vec{E}_r \cdot d\vec{a} = E_r (2\pi r l) = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda l$$

$$\therefore \vec{E}_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad (1-31)$$

أي أن المجال الناتج عن شحنة خطية لا نهائية الطول يتناسب عكسياً مع بعد النقطة عن محور الشحنة كما هو مبين في الشكل رقم (1-1) والمعادلة (1-31) وباتجاه الشعاع المتعامد الخارج من الشحنة.

: لكرة عازلة تحمل شحنة موزعة بانتظام كثافتها الحجمية  $\rho$ . (على الطالب إثبات ذلك)  
يمكن إثبات أن:

$$E_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}, \quad r \geq R \quad \dots\dots(1-32)$$

$$E_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r, \quad r \leq R \quad \dots\dots(1-33)$$

: لكرة (قشرة) معدنية تحمل شحنة  $Q$  موزعة بانتظام. (على الطالب إثبات ذلك).

حيث يمكن إثبات أن:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r > R \quad \dots\dots(1-34)$$

$$E_r = 0, \quad r < R \quad \dots\dots(1-35)$$

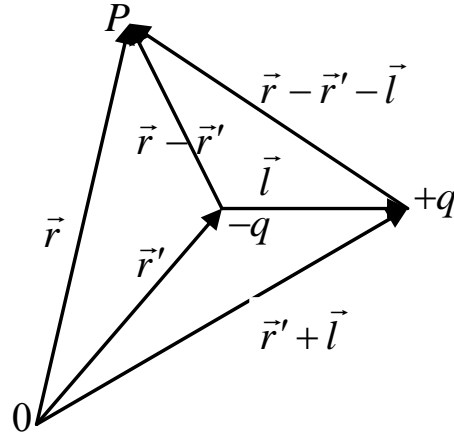
## (The Electric Dipole)

يطلق على الشحنة الكهربائية النقطية اسم الأحاطبي أو أحادي القطب (Monopole) فإذا أزيحت هذه الشحنة النقطية  $q$  مسافة صغيرة  $l$  واستبدلت بشحنة أخرى مساوية لها بالمقدار ومضادة لها بالنوع ينتج عن ذلك ما يسمى بالثنائي قطبي (dipole)، ومرة أخرى إذا أزيح الثنائي قطبي من موقعه مسافة صغيرة واستبدل الثنائي قطبي الأصلي بثنائي قطبي آخر مخالف له بالنوع ينتج عن ذلك ما يسمى بالرباعي القطبي (Quadra pole) وبشكل عام فإن بالإمكان تكوين  $2^n$  قطب، حيث تمثل  $n$  عدد الإزاحات في كل مرة أي أنه إذا كانت  $n = 0$  فإنه سيتشكل أحادي القطب (monopole) وإذا كانت  $n = 1$  سيتشكل ثنائي القطب (dipole) وهكذا.

ويمكننا إيجاد المجال والجهد لأية توزيعه من الشحنات السابقة وذلك بتطبيق المعادلات (1-8)، (1-21) و (1-24) على النحو التالي:

$$\vec{E}$$

لنفترض شحنة لتناقطى  $-q$  على بعد  $\vec{r}'$  من نقطة الأصل وشحنة  $+q$  على بعد  $l$  منها أي على بعد  $\vec{r}' + l$  من نقطة الأصل كما في الشكل رقم (٧-١).



الشكل رقم (٧-١):

وبالتالي فإن المجال الكهربائي عند نقطة اختباريه على بعد  $\vec{r}$  يمكن إيجاده بتطبيق المعادلة (1-8) التالية:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \\ + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \lambda(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\ell'$$

أي أن:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}' - \vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{l}|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \dots (1-36)$$

والمعادلة (1-36) صحيحة لأية قيمة تأخذها  $q$  أو  $l$  لكنها غير سهلة التحليل بوضعها الحالي، والهدف هنا أن تستخدم هذه المعادلة لثنائي قطبي حيث يكون عادة  $\vec{l} \perp \vec{r} - \vec{r}'$ . وبإيجاد مفكوك بعض المقادير



وإهمال الكميات الصغيرة، فإننا نحصل على علاقة سهلة التحليل كما يلي:

$$\begin{aligned}
 |\vec{r} - \vec{r}' - \vec{l}|^{-3} &= \left[ (\vec{r} - \vec{r}' - \vec{l})^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\
 &= \left[ \{(\vec{r} - \vec{r}') - \vec{l}\}^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\
 &= \left[ |\vec{r} - \vec{r}'|^2 - 2(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{l} + l^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\
 &= |\vec{r} - \vec{r}'|^{-3} \left[ 1 - \frac{2(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{l^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right]^{-\frac{3}{2}} \\
 &= |\vec{r} - \vec{r}'|^{-3} \left[ 1 - \frac{2(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \dots \right]^{-\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

حيث أهملت الحدود التي تحتوي على  $l^2$ . وباستخدام المتوالية

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

فإن:

$$|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{l}|^{-3} \left[ 1 - \frac{2(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \dots \right]^{-\frac{3}{2}} = |\vec{r} - \vec{r}' - \vec{l}|^{-3} \left[ 1 - \left( \frac{-3}{2} \right) \frac{2(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \dots \right]$$

$$\therefore \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{l}|^3} = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-3} \left[ 1 + \frac{3(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \dots \right] \quad (1-37)$$

وبالتعويض عن  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{l}|^3}$  من المعادلة (1-37) في المعادلة (1-36) (1-36)

فإن:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r}-\vec{r}'-\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \left( 1 + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}')\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} + \dots \right) - \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r}-\vec{r}'-\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}')\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} (\vec{r}-\vec{r}'-\vec{l}) + \dots - \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \frac{\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{3(\vec{r}-\vec{r}')\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} (\vec{r}-\vec{r}') - \frac{3(\vec{r}-\vec{r}')\vec{l}\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} - \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] \\
\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{r}-\vec{r}')\vec{l}(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} - \frac{\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] \quad (1-38)
\end{aligned}$$

والمعادلة (1-38) تعطي المجال الكهربائي لثنائي قطبي محدود، حيث نلاحظ أن المجال الكهربائي يتناسب طردياً مع المسافة بين الشحنتين  $\vec{l}$ . وهناك بالطبع حدود تناسب أخرى إلا أنها أهملت؛ لأن المجال يتناسب طردياً فيها مع مربع ومكعب المسافة بين الشحنتين، ومع أسس أعلى.

لنستخدم الآن الرمز  $\vec{P}$  ليمثل عزم الثنائي قطبي الكهربائي والذي يساوي:

$$\vec{P} = q\vec{l}$$

حيث أن اتجاه  $\vec{P}$  في اتجاه  $\vec{l}$  دائماً أي من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة حسب الشكل رقم (٧-١) وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (1-38) بدلالة  $\vec{P}$  على النحو التالي:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{r}-\vec{r}')\vec{P}(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} - \frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] \quad (1-39)$$

وتجدر الإشارة هنا إلى أن  $\vec{P}$  خاصية ذاتية للثنائي قطبي.

إن توزيع الجهد الناتج عن ثنائي قطبي كهربائي هام أيضاً ومن الممكن إيجاد الجهد الكهربائي و المجال بسهولة حسب المعادلة:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (1-40)$$

فإذا استطعنا إيجاد دالة  $\Phi$  بحيث يكون التدرج (gradient) لها مساوياً للطرف الأيمن للمعادلة (1-40) أمكننا إيجاد الجهد من المجال، ولكن من الأسهل لنا الآن أن نجد الجهد من المعادلة (1-21) ويتم ذلك على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' - \vec{l}|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \end{aligned} \quad (1-41)$$

وكما هو الحال في معادلة المجال (1-37) فإن المعادلة (1-41) هي عامة وصحيحة لأية قيمة تأخذها  $l$  و  $q$  و  $\vec{l}$  وسنقوم بتبسيط الحالة لثنائي القطبي الكهربائي عندما  $\vec{l} \perp \vec{r} - \vec{r}'$  تماماً كما فعلنا في حالة المجال الكهربائي وذلك باستخدام المتوالية التالية:

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} \pm \dots$$

وبهذا فإن:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}' - \vec{l}|^{-1} &= |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \left[ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \dots \right] \\ &= \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \dots \right] \end{aligned}$$

وبإهمال الحدود التي تحتوي على  $l^2$ ، و  $l$  للأسس الأعلى من ٢ وبالتعويض عن العلاقة السابقة في المعادلة (1-41) نحصل على:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \quad (1-42)$$

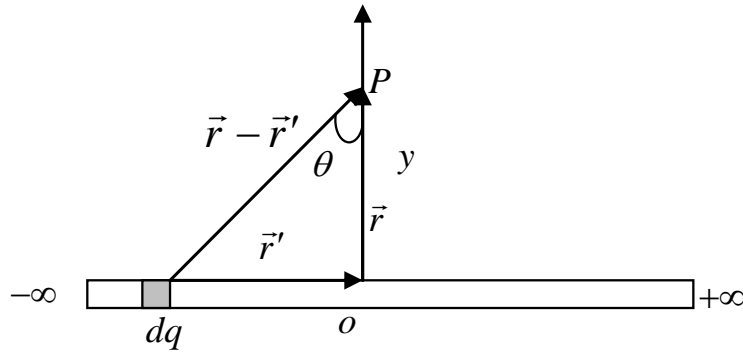
تكتب المعادلة (1-42) بدلالة  $\vec{P}$  على النحو التالي:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1-43)$$

وبما أنه أصبح لدينا معادلة لإيجاد الجهد الكهربائي فإن هذه المعادلة يمكن استخدامها لإيجاد المجال الكهربائي مباشرة، وذلك باستخدام المعادلة (1-39) أي بإيجاد التدرج للجهد من المعادلة (1-43).

( - )

أوجد المجال الكهربائي على بعد  $y$  من سلك لا نهائي الطول يحمل شحنة كثافتها الطولية  $\lambda$ ، كما في الشكل رقم (٨-١).



الشكل رقم (٨-١)

الحل:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$dq = \lambda dx$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = y \hat{j} - x \hat{i}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = [y^2 + x^2]^{\frac{3}{2}}$$

وبما أن مساهمة المجال بالاتجاه  $x$  تساوي صفراً نتيجة التناظر. ويبقى فقط المساهمة في الاتجاه  $y$  فإن:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx \cdot y \hat{j}}{(y^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{y\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(y^2 + x^2)^{3/2}} \hat{j}$$

افرض أن:

$$\frac{x}{y} = \tan \theta \rightarrow x = y \tan \theta$$

$$dx = y \sec^2 \theta d\theta$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{2y\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y \sec^2 \theta d\theta}{y^3 / \cos^3 \theta} \hat{j} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \hat{j}$$

لاحظ أننا أخذنا التكامل من الصفر إلى  $\frac{\pi}{2}$  و ضربنا النتيجة في ٢ لأن

السلك متماثل:

$$\vec{E} = \frac{2\lambda \hat{j}}{4\pi\epsilon_0 y} \left[ \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\lambda \hat{j}}{4\pi\epsilon_0 y} [1 - (0)]$$

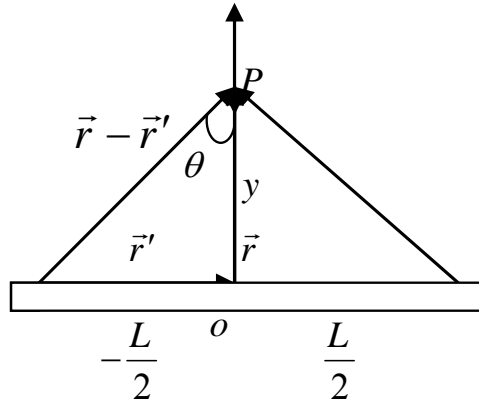
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \hat{j}$$

( - )

أعد حل المثال (٣-١) على اعتبار السلك محدود الطول ويساوي  $L$  كما في الشكل رقم (٩-١).

سيختلف الحل السابق فقط في حدود التكامل بدلا من 0 إلى  $\frac{\pi}{2}$  سيصبح من 0 إلى  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \therefore \vec{E} &= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} [\sin\theta - 0] \hat{j} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 y} \times 2\lambda \sin\theta \hat{j} = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{L^2 + 4y^2}} \hat{j} \end{aligned}$$

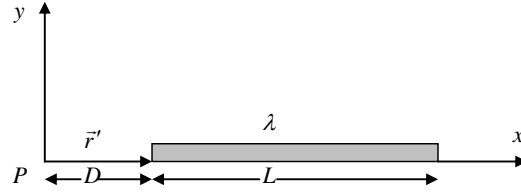


الشكل رقم (٩-١)

لاحظ أنه عندما  $L \gg y$  فإن النتيجة السابقة سوف تؤول إلى المثال (٣-١) أي لسلك لانهائي الطول.

( - )

قضيب طوله  $L$  مشحون بشحنة منتظمة كثافتها الطولية  $\lambda$  ويبعد عن نقطة الأصل مسافة  $D$  كما في الشكل رقم (١٠-١). أوجد المجال في نقطة الأصل.



الشكل رقم (١٠-١).

الحل:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = O - x \hat{x} = -x \hat{x}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dx \cdot (-x \hat{x})}{x^3} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_D^{D+L} \frac{-dx}{x^2} \hat{x}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{x} \right]_D^{D+L} \hat{x}$$

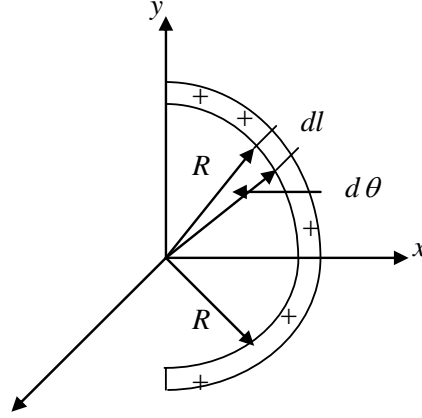
$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{D+L} - \frac{1}{D} \right] \hat{x}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{D - D - L}{D(D+L)} \right] \hat{x}$$

$$\vec{E} = \frac{-\lambda L}{4\pi\epsilon_0 D(D+L)} \hat{x}$$

( - )

نصف حلقة نصف قطرها  $R$  وتحمل شحنة كثافتها الطولية  $\lambda$  كما في الشكل رقم (١١-١). احسب شدة المجال الكهربائي في مركزها.



الشكل رقم (١١-١)

الحل:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = 0 - \vec{r}'$$

من التماثل فإن المركبات للمجال باتجاه  $y$  تلغي بعضها بعضا وتبقى المركبات بالاتجاه  $x$  وبالتالي فإن:

$$\vec{r} - \vec{r}' = -\vec{r}' = -R \sin \theta \hat{x}$$

وكذلك:-



$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = R^3$$

$$dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$$

$$d\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R d\theta \cdot R \sin\theta \hat{x}}{R^3}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi -\sin\theta d\theta \hat{x}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} [\cos\theta]_0^\pi \hat{x}$$

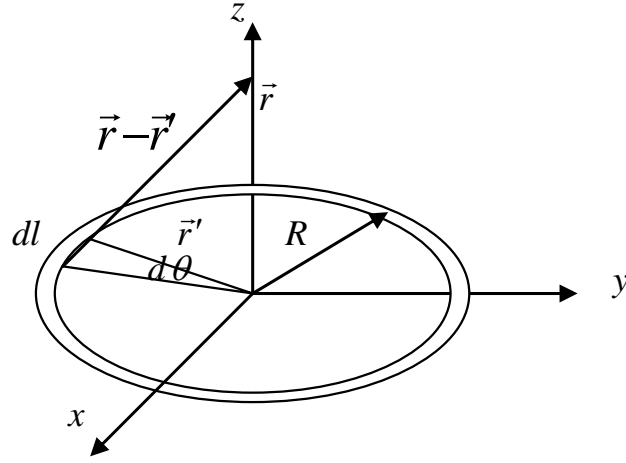
$$= -\frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \hat{x}$$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{x}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \left[ \cos\theta \right]_{-2\pi}^{2\pi} \hat{x} = 0$$

( - )

حلقة مشحونة بشحنة منتظمة كثافتها الطولية  $\lambda$ . كما في الشكل رقم (١٢-١). أوجد المجال الكهربائي في النقطة  $P$  الواقعة على بعد  $z$  عن المحور إذا علمت أن نصف قطر الحلقة  $R$ .



الشكل رقم (١٢-١)

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = z \hat{z} - R \hat{R}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = [z^2 + R^2]^{3/2}$$

$$\therefore d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}} (z \hat{z} - R \hat{R})$$

ولكن مساهمة المجال في الاتجاه  $\hat{R}$  تساوي صفراً ولدينا فقط مساهمة المجال في الاتجاه  $\hat{z}$  فقط.

$$d\vec{E} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda R z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \hat{z}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{2\pi\lambda R z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z} \\ &= \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z} \end{aligned}$$

لاحظ أن نصف القطر  $R$  لو اقترب من الصفر و عوضنا عن  $q = 2\pi R \lambda$  فإن المجال  $\vec{E}$  سيساوي.

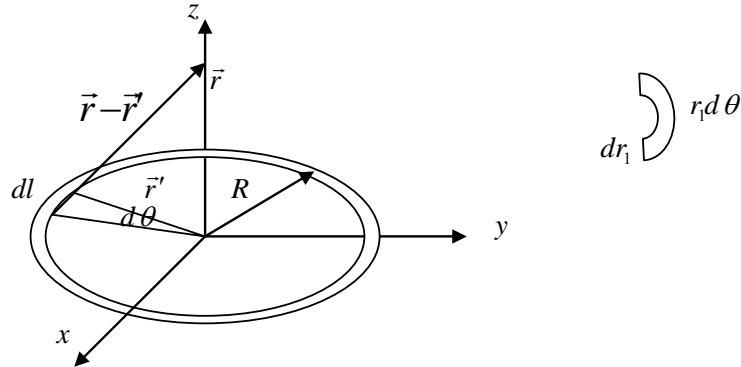
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{z^2} \hat{z}$$

وهو مجال شحنة نقطية.

( - )

صفيحة دائرية نصف قطرها  $R$  وتحمل شحنة كثافتها السطحية

$\sigma$ . كما في الشكل رقم (١٣-١). أوجد المجال على بعد  $z$  من المحور.



الشكل رقم (١٣-١)

الحل:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$dq = \sigma da = \sigma r_1 d\theta dr_1$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = z \hat{z} - r_1 \hat{r}_1$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = [z^2 + r_1^2]^{3/2}$$

ولكن مساهمة المجال باتجاه  $\hat{r}_1$  تساوي صفراً ويساهم المجال فقط باتجاه

$\hat{z}$ .

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma r_1 d\theta dr_1}{(r^2 + z^2)^{3/2}} z \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r_1 d\theta dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^R \left[ \theta \right]_0^{2\pi} \hat{z}$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{z} \right] \cdot 2\pi \cdot \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \cdot \hat{z}$$

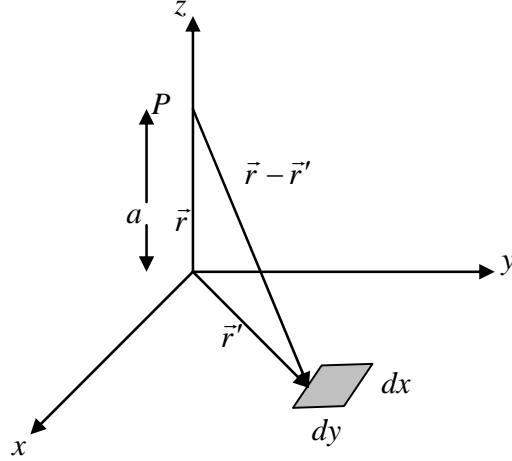
لاحظ أن النتيجة السابقة عندما  $R \approx \infty$  فإن المجال يؤول إلى مجال صفيحة

لا نهائية أو عندما نجد المجال قريباً جداً من السطح  $R \gg z$  فإن:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad , \quad (R \approx \infty, z = 0)$$

( - )

احسب المجال الكهربائي عند النقطة  $P$  الناتج عن صفيحة لا نهائية مشحونة بشحنة منتظمة كثافتها  $\sigma$  وتقع في المستوى  $xy$ . كما في الشكل رقم (١٤-١).



الشكل رقم (١٤-١)

الحل:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = a \hat{z} - (x \hat{x} + y \hat{y})$$

$$= a \hat{z} - x \hat{x} - y \hat{y}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (a^2 + x^2 + y^2)^{3/2}$$

$$da = dx dy$$

$$dq = \sigma dx dy$$

بما أن التماثل في المسألة باتجاه  $\hat{z}$  فإن مركبات المجال  $E_x$ ،  $E_y$  تلغى بعضها. وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dx dy (a\hat{z} - x\hat{x} - y\hat{y})}{(a^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dx dy a\hat{z}}{(a^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \bar{E} &= \frac{\sigma a}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(a^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{z} \\ \bar{E} &= \frac{\sigma a}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{y}{(a^2 + x^2 + y^2)^{1/2} (a^2 + x^2)} \right]_{-\infty}^{\infty} \hat{z} \\ &= \frac{\sigma a}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx [(1) - (-1)] \frac{1}{(a^2 + x^2)} \hat{z} \\ &= \frac{\sigma a}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2dx}{a^2 + x^2} \hat{z} \\ &= \frac{\sigma a}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{a} \tan^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} \hat{z} \\ &= \frac{\sigma a}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \hat{z} \\ &= \frac{\sigma a}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\pi}{a} \hat{z}\end{aligned}$$

$$\bar{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

١ - ١ إذا كان هناك ثلاث شحنات  $1 n C$  و  $2 n C$  و  $3 n C$  موضوعة على المحور  $x$  عند النقاط التالية  $(1, 0, 0)$  و  $(2, 0, 0)$  و  $(3, 0, 0)$  على التوالي: (i) أوجد المجال الكهربائي الناتج عن هذه الشحنات عند النقطة  $p (0, 0, 0)$ . (ii) أوجد الجهد الكهربائي عند النقطة  $p$ . (iii) أوجد النقطة التي يكون عندها المجال الكهربائي يساوي صفراً. (iv) أوجد القوة المؤثرة على الشحنة  $4 n C$  إذا كانت موضوعة عند النقطة  $(0, 0, 0)$  وإذا كانت موضوعة عند النقطة  $(4, 0, 0)$  من ترتيب الشحنات المشار إليها أعلاه.

١ - ٢ تم ربط شحنتين متساويتين وشحنة كل منها تساوي  $q C$  بخيطين طول كل خيط  $L$  من نقطة واحدة. فإذا كان وزن كل شحنة  $m$  kg (أهمل وزن الخيطين) فأوجد الزاوية التي يشكلها الخيطان بين بعضهما عند الاستقرار.

١ - ٣ إذا وضعت ست شحنات متساوية  $q C$  عند كل حافة من حواف مكعب طول ضلعه  $L$ . أوجد القوة المؤثرة على كل شحنة من هذه الشحنات والقوة المؤثرة على شحنة  $q_1 C$  الموضوعة في مركز المكعب.

١ - ٤ وضع سلك، طول  $L$ ، مشحون بكثافة شحنة خطية  $C/m$  على المحور  $z$  من النقطة  $(0, 0, 0)$  وحتى النقطة  $(0, 0, L)$ . أوجد المجال

الكهربائي  $E$ ، والجهد الكهربائي  $V$  عند النقطة  $(0, d, 0)$  أو عند النقطة  $(r, \phi, 0)$ .

٥ -١ إذا كانت هناك حلقة نصف قطرها  $a$  وكانت كثافة الشحنات الخطية عليها  $\lambda C/m$ . وإذا كانت الحلقة موضوعة في المستوى  $xy$  ومركزها عند نقطة الأصل فأوجد المجال الكهربائي  $E$  والجهد الكهربائي  $V$  عند نقطة  $z$  على المحور  $(0, 0, z)$  وكذلك عند نقطة الأصل.

٦ -١ إذا كان هناك قرص نصف قطره  $a$  مشحون بكثافة شحنة سطحية  $\sigma C/m^2$  وموضوع في المستوى  $xy$  ومركزه عند نقطة الأصل. أوجد المجال الكهربائي  $E$  والجهد الكهربائي  $V$  عند النقطة  $(0, 0, z)$ .

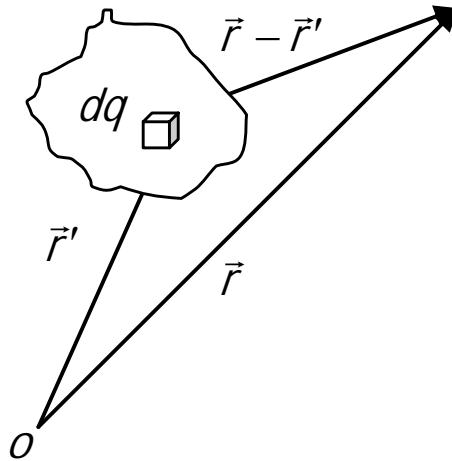
٧ -١ إذا كانت كثافة الشحنات الحجمية في وسط سماحيته  $\epsilon_0 F/m$  ومحدد بالكرة  $r=a$  هي  $\rho_0 C/m^3$  فأوجد المجال الكهربائي  $E$  وكثافة الفيض الكهربائي  $D$  والجهد الكهربائي  $V$  في كل مكان  $0 \leq r < \infty$ .

٨ -١ إذا كانت كثافة الشحنات الحجمية في كرة نصف قطرها  $a$  وسماحيته  $\epsilon_0 F/m$  هو  $K r C/m^3$ ، فأوجد المجال الكهربائي  $E$  وكثافة الفيض الكهربائي  $D$  والجهد الكهربائي  $V$  في كل مكان  $0 \leq r < \infty$ .



## حل المسائل الكهروستاتيكية

رأينا في الفصل الأول أن حل أية مسألة كهروستاتيكية يعد سهلا في الحالة التي يكون فيها توزيع الشحنات معلوما. ولقد عرضنا كيفية إيجاد كل من الجهد والمجال الناتج عن توزيع من الشحنات كما في الشكل رقم (١-٢)، وذلك بجعل التكامل يغطي توزيع الشحنات بالكامل.



الشكل رقم (١-٢)

أي أن:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2-1)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (2-2)$$

ولكن يبدو لنا أن المشكلة في واقع الحال هي عدم معرفتنا لتوزيع الشحنات سلفاً في معظم المسائل الكهروستاتيكية. وبالتالي يتوجب علينا عكس المسألة بأن نقوم بتعيين المجال الكهربائي أو الجهد الكهربائي قبل حساب توزيع الشحنات. فمثلاً هناك مسائل تحتوي على عدة موصلات يكون توزيع الشحنة فيها مجهولاً، ولكن الجهد الكهربائي أو الشحنة الكلية قد يكون معلوماً، وبالتالي لا يمكن معرفة توزيع الشحنة إلا بعد إنجاز حل المسألة بالكامل. ويعتبر هذا أسلوباً جديداً وبديلاً للأسلوب الذي عولج في الفصل الأول لحل المسائل الكهروستاتيكية. والجدير بالذكر أننا سنقتصر في دراستنا هذا الفصل على الموصلات ونترك العازلات لمعالجتها في الفصل القادم.

-

لقد قمنا باشتقاق جميع العلاقات الأساسية التي نحتاجها في الفصل الأول ولذلك يجب علينا العودة إلى تلك الاشتقاقات عند الضرورة فمثلاً الصيغة التفاضلية لقانون جاوس هي:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = + \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2-3)$$

كما بينا أنه بالإمكان التعبير عن المجال الكهروستاتيكي ( $\vec{E}$ ) بسالب التدرج  $\phi$  أي أن:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad (2-4)$$

وبالتعويض عن ( $\vec{E}$ ) في المعادلة (2-3) نحصل على صيغة جديدة لقانون جاوس على النحو التالي:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \frac{-\rho}{\epsilon_0} \quad (2-5a)$$

وتكتب الكمية ( $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ ) بشكل أكثر ملاءمة وهو على شكل تفاضلي جديد يدعى باللابلاسيان ( $\nabla^2$ ) لذا فإن المعادلة (2-5a) يمكن أن تكتب على النحو التالي:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2-5b)$$

يلاحظ من المعادلة (2-5b) أن اللابلاسيان ( $\nabla^2$ ) هو كمية قياسية (غير متجهة). والمعادلة أيضاً تفاضلية حيث تدعى بمعادلة بواسون. ونظراً لأن تفاضل اللابلاسيان ( $\nabla^2$ ) يتضمن تفاضلاً لأكثر من متغير ( $z, y, x$ ) في الإحداثيات الديكارتية،  $r, \theta, \phi$  في الإحداثيات الكروية،  $r, \phi, z$  في الإحداثيات الأسطوانية فإن معادلة بواسون تعد معادلة تفاضلية جزئية، حيث يرتبط التفاضل الجزئي لدالة الجهد  $\phi$  عند نقطة معينة مع كثافة الشحنة الحجمية  $\rho$ . وبالتالي يمكن إيجاد حل معادلة بواسون بمعرفة الدالة  $\rho$  والشروط الحدودية (Boundary conditions) المناسبة للمسألة. إن المعامل ( $\nabla^2$ ) شأنه شأن الانحدار ( $\vec{\nabla}$ ) والتفرق ( $\vec{\nabla}\cdot$ ) واللف ( $\vec{\nabla}\times$ ). فهو ليس مقصوراً على نظام إحداثيات معينة، وعادة نختار نظام الإحداثيات المناسب حسب طبيعة التماثل في المسألة.

يمكننا إيجاد ( $\nabla^2$ ) بإحداثيات معينة بخطوتين؛ الأولى: أن نجد التدرج ( $\bar{\nabla}$ ) ومن ثم التفرق لها ( $\bar{\nabla} \cdot$ ). والجدير بالذكر أن ( $\nabla^2$ ) في ثلاثة أبعاد (متغيرات) لنظم إحداثيات مختلفة تكون على النحو التالي:

أولاً: نظام الإحداثيات الديكارتي

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (2-6)$$

ثانياً: نظام الإحداثيات الكروية

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} \quad (2-7)$$

ثالثاً: نظام الإحداثيات الاسطوانية

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (2-8)$$

-

فضاء المسائل الكهروستاتيكية نوعان، إما أن يكون خالياً من الشحنات أو يكون فيه بعض الشحنات. فإذا كانت المسائل الكهروستاتيكية تتضمن الموصلات فإن الشحنة تكون مستقرة بأكملها على السطح أو تكون أحياناً على شكل شحنات نقطية مستقرة. وفي مثل هذه الحالات فإن  $\rho = 0$  عند معظم النقاط في الفضاء، وبالتالي فإن معادلة بواسون في تلك المناطق توول إلى ما يلي:

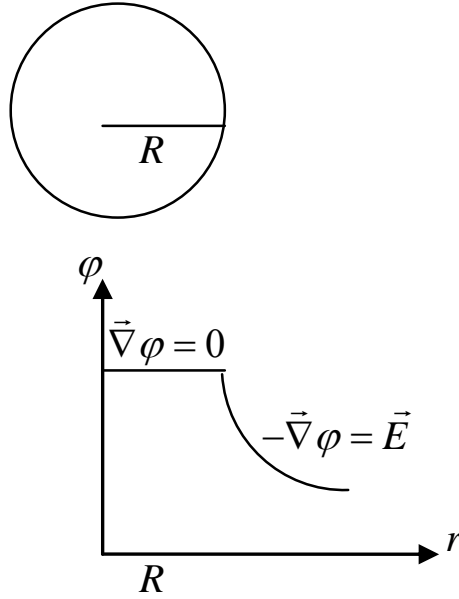
$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2-9)$$

حيث تسمى المعادلة (2-9) بمعادلة لابلاس.

ويمكن الحصول على حالة  $\rho = 0$  في فضاء لا يحتوي على موصلات أو فراغ لا يحتوي شيئاً أو فراغ يحتوي على عازل خال من مصدر مستمر لخلق الشحنات في ذلك الفراغ.

لنفرض أن لدينا مجموعة موصلات عددها  $N$  ، ولكل منها جهد ثابت مقداره  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  على الترتيب. والمطلوب الآن هو إيجاد الجهد الكهربائي عند جميع النقاط في الفضاء خارج تلك الموصلات. ويمكن عمل ذلك بإيجاد حل لمعادلة لابلاس يوؤل إلى  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  على سطح تلك الموصلات.

وقد نجد حلاً فريداً من هذا النوع لمعادلة لابلاس لكن لا يوجد حل آخر لها يحقق شروط الحدود نفسها. كما أن الحل الذي نحصل عليه لا ينطبق على النقاط الداخلية للموصلات وذلك لأن شحنة الموصلات تتجمع على السطح، وهذا يسبب انقطاعاً في تدرج الجهد عبر السطح [لاحظ الجهد لكرة موصلة في الشكل رقم (٢-٢)]. ونظراً لأن الجهد داخل الموصل يكون ثابتاً فإننا نعتبر الحل الذي نحصل عليه كاملاً، لأننا نكمل بالمنطق الجهد الآخر داخل الموصلات.



الشكل رقم (٢-٢)

والآن سنستعرض طريقتين لحل معادلة لابلاس بشيء من التفصيل.  
الأولى تتمثل في تركيب حل عام للمعادلة  $\nabla^2 \varphi = 0$  من حلول خاصة بنظام  
إحداثيات مناسب والأخرى بطريقة الصور (Image). وقبل البدء بإيجاد  
الحلول المناسبة علينا التعرف على خاصيتين مهمتين من خصائص حل  
معادلة لابلاس.

: إذا كانت  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  حلولاً لمعادلة لابلاس فإن:

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 ; \nabla^2 \varphi_2 = 0 ; \nabla^2 \varphi_N = 0$$

أي أن:

$$\varphi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_N \varphi_N \quad (2-10)$$

المعادلة (2-10) تعتبر حلاً أيضاً لمعادلة لابلاس حيث  $c_1, c_2, \dots, c_N$  ثوابت  
اختيارية.

البرهان:

$$\begin{aligned} \varphi &= c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_N \varphi_N \\ \nabla^2 \varphi &= \nabla^2 (c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_N \varphi_N) \\ \nabla^2 \varphi &= \nabla^2 c_1 \varphi_1 + \nabla^2 c_2 \varphi_2 + \dots + \nabla^2 c_N \varphi_N \\ \nabla^2 \varphi &= c_1 \nabla^2 \varphi_1 + c_2 \nabla^2 \varphi_2 + \dots + c_N \nabla^2 \varphi_N \\ \nabla^2 \varphi &= 0 + 0 + \dots + 0 \\ \therefore \nabla^2 \varphi &= 0 \end{aligned}$$

وباستخدام الخاصية السابقة فإنه بالإمكان تركيب حلين أو أكثر من  
حلول معادلة لابلاس بطريقة تجعل الحل الناتج يحقق المجموعة المعطاة  
للشروط الحدودية.

( - )

بين فيما يلي إذا كان الجهد  $\phi$  الآتي يحقق أولاً يحقق معادلة

لابلاس.

$$\phi = Cxyz \quad - (a)$$

$$\phi = C r \phi z \quad - (b)$$

$$\phi = C r \theta \phi \quad - (c)$$

**الحل:**

$$\phi = Cxyz \quad - (a)$$

بتطبيق المعادلة (2-6) نجد أن:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Cxyz) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(Cxyz) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(Cxyz)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial}{\partial x}(Cyz) + \frac{\partial}{\partial y}(Cxz) + \frac{\partial}{\partial z}(Cxy)$$

$$\nabla^2 \phi = 0 + 0 + 0$$

$$\therefore \phi = Cxyz$$

تحقق معادلة لابلاس.

$$(b) \phi = C r \phi z$$

بتطبيق المعادلة (2-8) نجد أن:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (Cr \phi z) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} (Cr \phi z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (Cr \phi z)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(C \phi z)) + \frac{1}{r^2} (0) + 0$$

$$= \frac{C \phi z}{r}$$

وبما أن  $\nabla^2 \varphi \neq 0$  فإن  $\varphi$  لا تحقق معادلة لابلاس.

$$\varphi = Cr\theta\phi \quad - (c)$$

بتطبيق المعادلة (2-7)، نجد أن

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} (Cr\theta\phi) \right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (Cr\theta\phi) \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} (Cr\theta\phi)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (Cr^2\theta\phi) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta Cr\phi) + 0$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} 2Cr\theta\phi + \frac{1}{r} \cot\theta C\phi$$

$$\nabla^2 \varphi \neq 0$$

لا تحقق معادلة لابلاس  $\therefore \varphi$

: نظرية الانفراد.

يمكن تلخيص نظرية الانفراد بوجود حل واحد فقط (فريد) لمعادلة لابلاس أو بواسون يحقق الشروط الحدودية للمسألة. فإذا وجد حلان لمعادلة لابلاس أو بواسون يحققان نفس الشروط الحدودية، فإن هذين الحلان يكونان متماثلين وإلا فإن أحدهما يختلف عن الآخر بثابت جمعي فقط.

فإذا افترضنا أن  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  حلين لمعادلة لابلاس، فإن:

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad , \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0$$

ويمكن برهان أن:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \text{ثابت}$$

أو

$$\varphi_1 = \varphi_2$$



-

سندرس في هذا البند مسائل كهروستاتيكية تتضمن شحنات متركزة على سطوح موصلات أو متجمعة في مناطق منفصلة أو كلا الحالتين. ففي الفضاء ما بين الموصلات أو بعيدا عن تجمع الشحنات فإن الجهد الكهروستاتيكي سيحقق معادلة لابلاس ( $\rho = 0$ ) وبالتالي  $\nabla^2 \varphi = 0$  لذلك سنقوم بدراسة حلول معادلة لابلاس بأوضاع مختلفة.

( )

-

تعد هذه الحالة من أبسط الحالات لحل معادلة لابلاس. وتكون هذه الحلول للحالات التي يكون فيها تماثل هندسي عالٍ جدا بحيث تكون  $\varphi$  دالة في متغير واحد. وإذا كانت حالة  $\varphi$  كذلك، عندئذٍ تؤول معادلة لابلاس إلى معادلة تفاضلية عادية بدلا من جزئية، و يكون حلها بسيط جدا كما سنبين في الحالات التالية:

- -

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

وبما أن  $\varphi$  دالة في  $x$  فقط فيمكننا تحويل التفاضل الجزئي إلى تفاضل عادي فتصبح العلاقة السابقة على النحو التالي:

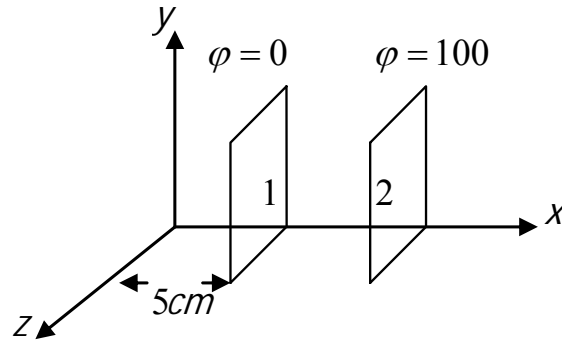
$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0 \quad (2-11)$$

وبتكامل المعادلة (2-11) مرتين، نحصل على:

$$\frac{d\varphi}{dx} = A$$

$$\varphi(x) = Ax + B \quad (2-12)$$

وتعد المعادلة (2-12) حلاً عاماً للمعادلة (2-11) حيث يمكن إيجاد الثابتين  $A$  ،  $B$  من الشروط الحدودية (boundary conditions) للمسألة. فالحل المبين في المعادلة (2-12) يمثل الجهد الكهروستاتيكي بين لوحين موصلين مشحونين عموديين على المحور  $x$  ويقعان في المستوى  $yz$  كما في الشكل رقم (٣-٢)، فإذا افترضنا أن اللوح الأول جهده يساوي صفراً ( $\varphi = 0$ ) ويقع على المحور  $x$  على بعد  $5\text{ cm}$  واللوح الثاني جهده يساوي  $100\text{ V}$  ( $\varphi = 100$ ) ويقع على بعد  $10\text{ cm}$ .



الشكل رقم (٣-٢)

فإن بالإمكان إيجاد الثابتين  $A$  ،  $B$  في المعادلة (2-12) من هذه الشروط على النحو التالي:

$$0 = 5A + B \quad \dots\dots\dots(2-13)$$

$$100 = 10A + B \quad \dots\dots(2-14)$$

وبحل المعادلتين السابقتين، نجد أن:

$$A = 20 \frac{V}{cm} , \quad B = -100 \frac{V}{cm}$$

وبالتعويض عن قيمة كل من  $A$  و  $B$  في المعادلة (2-12)، نجد أن معادلة الجهد تصبح على النحو التالي:

$$\varphi = 20x - 100 \quad (2-15)$$

والمعادلة (2-15) هي حل كامل للمسألة عندما نعوض عن  $x$  فيها نحصل على  $\varphi$  مباشرة وهي تحقق الشروط الحدودية بالكامل.

$$: (\phi, \theta, r) \quad - -$$

(a) لنفرض حالة تكون فيها  $\varphi$  دالة في  $r$  فقط، عندئذ يكون:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad \dots\dots(2-16)$$

ونظراً لأن  $\varphi$  دالة في  $r$  فقط فإن التفاضل الجزئي السابق يمكن تحويله

إلى تفاضل عادي فتصبح المعادلة (2-16) على النحو التالي:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots(2-17)$$

ومنها فإن:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

وبتكامل العلاقة السابقة مرتين، على النحو التالي:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = A$$

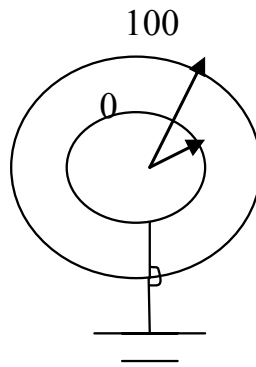
$$\therefore d\varphi = \frac{A}{r^2} dr$$

$$\therefore \varphi(r) = -\frac{A}{r} + B \quad \dots(2-18)$$

حيث يكون  $A$  ،  $B$  في المعادلة (2-18) ثابتين، و يمكن إيجاد قيمة كل منهما من الشروط الحدودية للمسألة.

( - )

قشرتان كرويتان نصف قطر الأولى  $10\text{cm}$  والثانية  $20\text{cm}$  كما في الشكل رقم (٤-٢). فإذا علمت أن القشرة الداخلية متصلة بالأرض (earthed) وجهد القشرة الخارجية  $100\text{V}$ ، أوجد معادلة الجهد  $\varphi$ .



الشكل رقم (٤-٢)

**الحل:**

من التماثل في المسألة فإن الجهد يعتمد على البعد عن المركز

فقط أي على  $r$ . وحسب المعادلة (2-18). نجد أن:

$$0 = -\frac{A}{10} + B$$

$$100 = -\frac{A}{20} + B$$

وبحل العلاقتين السابقتين نجد أن:

$$A = 2000 , \quad B = 200$$

بالتعويض عن  $A$  ،  $B$  في المعادلة (2-18) نجد أن  $\varphi$  :

$$\varphi = -\frac{2000}{r} + 200 \quad (2-19)$$

والمعادلة (2-19) تحقق الشروط الحدودية للمسألة، وهي حل لمعادلة لابلاس. لاحظ من هذه المعادلة أنه لا يمكننا التعويض عن  $r = 0$  لإيجاد الجهد الكهربائي في مركز القشرتين؛ وذلك لأن المعادلة اشتقت أصلا للنقاط الواقعة على بعد أكبر من نصف قطر القشرة الداخلية. و كما ذكرنا فإن معادلة لابلاس لا تعطي حلا لجميع النقاط، ولمعرفة الجهد داخل القشرة الداخلية فإننا نجد بالمنطق وهو أن عدم وجود مجال كهربائي داخل القشرة الداخلية ينتج عن تساوي الجهد، وبالتالي فإن الجهد في أية منطقة داخل القشرة الداخلية يساوي الجهد على سطحها. ولذلك يعد الحل الذي حصلنا عليه في المعادلة (2-19)، حلا كاملا لمعادلة لابلاس.

(b) لنفرض حالة تكون فيها  $\varphi$  دالة في  $\theta$  فقط. عندئذ يكون:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta} \right) = 0 \quad \dots\dots(2-20)$$

ومنها فإن:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta} \right) = 0$$

وبإجراء التكامل للعلاقة السابقة، نحصل على:

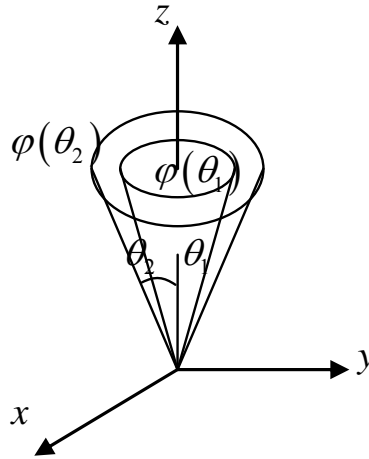
$$\sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta} = A$$

$$d\varphi = \frac{A}{\sin \theta} d\theta$$

وبإجراء التكامل للعلاقة السابقة، نحصل على الدالة  $\varphi$  ويكون لها الشكل التالي:

$$\varphi(\theta) = A \ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) + B \quad \dots\dots(2-21)$$

وتستخدم المعادلة (2-21) عادة لإيجاد الجهد على صفائح المكثف المخروطي المبين في الشكل رقم (٥-٢) ويلاحظ أن المكثف المخروطي عبارة عن صفيحتين مخروطيتين الشكل متحديتين بالمحور ويُكوّن كل مخروط سطح تساوي جهد



الشكل رقم (٥-٢)

ويمكن حساب الثوابت  $A$ ،  $B$ . فمثلا عند  $\theta = \theta_1$  فإن  $\varphi = V$  وكذلك عند  $\theta = \theta_2$  فإن  $\varphi = 0$  ولهذا يكون:

$$A \ln(\tan \frac{\theta_1}{2}) + B = V$$

$$A \ln(\tan \frac{\theta_2}{2}) + B = 0$$

وبحل المعادلتين نجد أن:

$$A = \frac{V}{\ln \left[ \frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)} \right]}$$

$$B = -A \ln(\tan \frac{\theta_2}{2})$$

عوض ذلك في المعادلة (2-21) نحصل على:

$$\phi = V \frac{\ln \left[ \frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)} \right]}{\ln \left[ \frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)} \right]}$$

(c) لنفرض حالة تكون فيها  $\phi$  دالة في الزاوية  $\phi$  فقط. عندئذ يكون:

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{d^2 \phi}{d\phi^2} \right) = 0$$

ومنها فإن

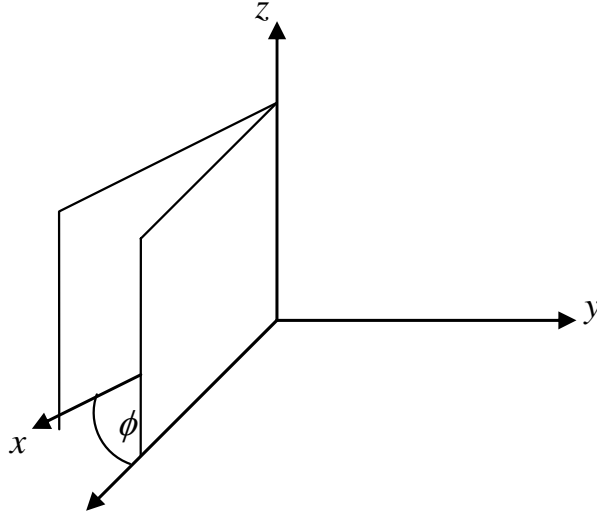
$$\left( \frac{d^2 \phi}{d\phi^2} \right) = 0$$

وبإجراء التكامل مرتين للعلاقة السابقة نحصل على:

$$\frac{d\phi}{d\phi} = A$$

$$\phi(\phi) = A\phi + B \dots\dots\dots(2-22)$$

وتنطبق المعادلة (2-22) على المكثف الأسفيني (Wedge Capacitor) المبين في الشكل رقم (٦-٢).



الشكل رقم (٦-٢)

$$:(r, \phi, z)$$

--

(a) لنفرض حالة تكون فيها  $\phi$  دالة في  $r$  فقط. فإن معادلة لابلاس:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

تؤول إلى:



$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$

ومنها فإن:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$

ويجاء التكامل للمعادلة السابقة نحصل على:

$$r \frac{d\phi}{dr} = A$$

ويجاء التكامل مرة أخرى نحصل على:

$$\phi(r) = A \ln r + B \quad (2-23)$$

وتطبق المعادلة (2-23) على قضيب موصل طويل يحمل شحنة منتظمة.

( - )

قضيب معدني طويل جدا نصف قطره  $10\text{cm}$  وجهد  $12\text{V}$ . إذا علمت أن جهد نقطة مثل  $p$  على بعد  $20\text{cm}$  يساوي  $6\text{V}$ ، فأوجد معادلة الجهد خارج هذا القضيب.

**الحل:**

بتطبيق المعادلة (2-23)، نجد أن:

$$12 = A \ln 10 + B$$

$$6 = A \ln 20 + B$$

وبحل المعادلتين السابقتين، نجد أن:

$$A = -8.656(\text{V})$$

$$B = 31.93(\text{V})$$

وبالتعويض عن  $A$  و  $B$  في المعادلة (2-23) نجد أن:

$$\varphi(r) = -8.656 \ln r + 31.93$$

(b) لنفرض حالة تكون فيها  $\varphi$  دالة في  $\phi$  فقط، عندئذ يكون:

$$\frac{d^2\varphi}{d\phi^2} = 0$$

وبإجراء التكامل مرتين للعلاقة السابقة نحصل على:

$$\varphi(\phi) = A\phi + B \quad (2-24)$$

وهذه الحالة لا تختلف عن  $\varphi$  في الإحداثيات الكروية عندما كانت تعتمد على الزاوية  $\phi$  فقط.

(c) لنفرض حالة تكون فيها  $\phi$  دالة في  $z$  فقط، عندئذ يكون:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

ومنها فإن:

$$\varphi(z) = Az + B \quad \dots\dots\dots(2-25)$$

وهكذا يكون قد حصلنا على دالة الجهد  $\varphi$  عندما تتغير في اتجاه واحد فقط في نظم الإحداثيات الثلاثة.

-

سندرس الآن مسائل كهروستاتيكية أخرى لكنها أقل تماثلاً من السابق، ونقصد هنا المسائل التي يتغير الجهد فيها في بعدين. ونظراً لأن عدد من المسائل التي تهتمنا في الحياة العملية تتعلق بموصلات كروية وأسطوانية فإننا سنعمد لدراسة حل معادلة لابلاس في هذين النظامين.

(  $\phi$  )

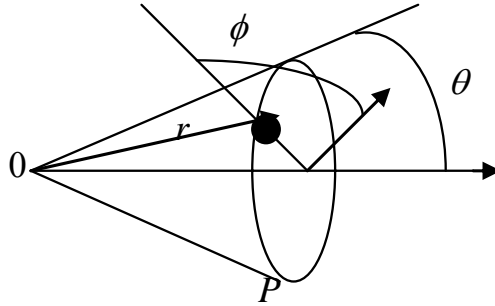
- -

لنفرض حالة تكون فيها  $\phi$  دالة في  $r$  و  $\theta$ . عندئذ تؤول معادلة

لابلاس إلى ما يلي:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2-26)$$

والمعادلة (2-26) تشير إلى أن  $\phi$  تتغير في الاتجاهين  $r$  و  $\theta$  كما في الشكل رقم (٧-٢).



الشكل رقم (٧-٢)

هناك طريقة تعرف باسم فصل المتغيرات، وتستخدم في حل المعادلات التفاضلية الجزئية، أي عندما يكون هناك أكثر من متغير. وتفترض هذه الطريقة أن الدالة  $\phi(r, \theta)$  عبارة عن حاصل ضرب دالتين إحداهما دالة في  $r$  فقط والأخرى دالة في  $\theta$  فقط. أما إذا كانت  $\phi$  دالة في ثلاث متغيرات أي  $\phi(r, \theta, \phi)$  فستكون هذه الدالة عبارة عن حاصل ضرب ثلاث دوال إحداهما في  $r$  والثانية في  $\theta$  والثالثة في  $\phi$  وهكذا. ولحل المعادلة (2-26) سنفرض أن:

$$\phi(r, \theta) = Y(r) \cdot P(\theta) \quad (2-27)$$

ومنها فإن:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = Y \cdot \frac{dP}{d\theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = P \cdot \frac{dY}{dr} \quad (2-28)$$

وبالتعويض عن  $\varphi(r, \theta)$ ،  $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ ،  $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$  في المعادلة (2-26) نحصل على:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 P \frac{dY}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta Y \frac{dP}{d\theta} \right) = 0$$

ومنها فإن:

$$\frac{P}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{dY}{dr} \right) + \frac{Y}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0$$

ونلاحظ من العلاقة السابقة أن التفاضل الجزئي  $\frac{\partial}{\partial r}$  هو بالنسبة لمتغير

واحد فقط هو  $r$ ، والتفاضل الجزئي  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  هو لمتغير واحد فقط هو  $\theta$ ،

وبالتالي يمكننا تغيير هذين التفاضلين الجزئيين في العلاقة السابقة إلى

تفاضلين عاديين؛ أي أن العلاقة السابقة تكتب كما يلي:

$$\frac{P}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dY}{dr} \right) + \frac{Y}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0$$

وبفصل ما يعتمد على  $r$  عن ما يعتمد على  $\theta$  (من هنا جاءت تسمية هذه

الطريقة بفصل المتغيرات) كل منهما على طرف، نحصل على:

$$\frac{1}{Y} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dY}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \quad (2-29)$$

نلاحظ من الطرف الأيمن للمعادلة (2-29) أنه يعتمد على  $\theta$  فقط كما أن

الطرف الأيسر يعتمد على  $r$  فقط. والطريقة الوحيدة التي يكون فيها

هذان الطرفان متساويين لجميع قيم  $r$  و  $\theta$  هو أن يتساوى الطرفان مع

ثابت مثل  $K$  ويطلق على هذا الثابت اسم ثابت الفصل، أي أن:

$$-\frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = K$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dY}{dr} \right) = K$$

ومن العلاقتين السابقتين نجد أن:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + KP = 0 \quad (2-30)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dY}{dr} \right) - KY = 0 \quad (2-31)$$

ويطلق على المعادلة (2-30) معادلة لاجندر، ولها عدة حلول مقبولة فيزيائياً لجميع قيم المتغير  $\theta$  بين 0 و  $\pi$  إلا أنه ليس بالضرورة أن تقود جميع قيم  $K$  إلى حلول مقبولة فيزيائياً. فالحلول المقبولة هي التي ترافق القيمة  $K$  حيث.

$$K = n(n+1) \quad (2-32)$$

و  $n$  عدد صحيح موجب. وسنرمز للحل الذي يلائم العدد  $n$  بالرمز  $P_n(\theta)$  أي أن  $P_1(\theta)$  هو الحل عندما تكون  $n=1, K=2$ ، و  $P_2(\theta)$  هو الحل عندما تكون  $n=2, K=6$  وهكذا. أما القيم الأخرى للثابت  $K$  (عندما  $n$  لا تساوي عدداً صحيحاً أو موجباً) فتعطي حلولاً غير معرفة وتعد هذه الحلول معتلة. ونظراً لأن مثل هذه الحلول لا تتلاءم مع الشروط الحدودية للمسائل الفيزيائية فإن علينا إهمالها.

تعد الحلول المقبولة  $P_n(\theta)$  (أو تكتب أحياناً  $P_n(\cos \theta)$ ) متعددة الحلول بالنسبة لـ  $\cos \theta$  وتعرف عادة باسم متعددات حدود لاجندر. ويبين الجدول التالي دوال لاجندر الأربع الأولى.

$n$	$k$	$P_n(\theta)$
0	0	$P_0 = 1$
1	2	$P_1 = \cos \theta$
2	6	$P_2 = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
3	12	$P_3 = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta + 3 \cos \theta)$

يلاحظ بأن أية دالة من الدوال في الجدول تحقق المعادلة (2-30) ويمكنك التأكد من ذلك.

بعد أن انتهينا من حل المعادلة (2-30) سنعود الآن للبحث عن حل للمعادلة (2-31). وهي المعادلة التي تعتمد على  $r$  فقط وحيث أن قيم  $K$  قد تم تعيينها، كما في المعادلة (2-32). فإن المعادلة (2-31) تصبح على النحو التالي:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dY}{dr} \right) = n(n+1)Y \quad (2-33)$$

إن المتأمل للمعادلة السابقة يظهر له حلان مستقلان لها لكل قيمة لـ  $n$  وهما:

$$Y_n = r^n, \quad Y_n = r^{-(n+1)} \quad (2-34)$$

ويمكن أيضا التأكد من الحلين السابقين بالتعويض المباشر عنهما في المعادلة (2-33) وحيث أننا افترضنا مسبقا أن  $\varphi(r, \theta)$  عبارة عن حاصل ضرب دالتين، ونظرا لوجود حلين مستقلين للدالة  $Y$  فإن هناك حلين لمعادلة لابلاس، وهما:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= r^n P_n(\theta) \\ \varphi(r, \theta) &= r^{-(n+1)} P_n(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2-35)$$

ويجب الانتباه دائماً إلى جعل الدالتين في المعادلة (2-35) مرادفتين لقيمة واحدة للعدد الصحيح الموجب  $n$ .

ونظراً لحصولنا على مجموعة من الحلول تعتمد على  $n$  فإن هذه الحلول تعرف بالتوافقيات المنطقية (Zonal Harmonics).

وحسب الخاصية الأولى لمعادلة لابلاس، فإنه بالإمكان تكوين حل عام لمعادلة لابلاس بتركيب الحلول السابقة للمعادلة بشرط أن تظهر المسألة الفيزيائية تناظر سمتياً ملائماً. ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة (2-35) على النحو التالي:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{P_n(\theta)}{r^{n+1}} \quad (2-36)$$

حيث  $A_n$ ،  $B_n$  عبارة عن مجموعة ثوابت اختيارية، يمكن إيجادها من الشروط الحدودية للمسألة.

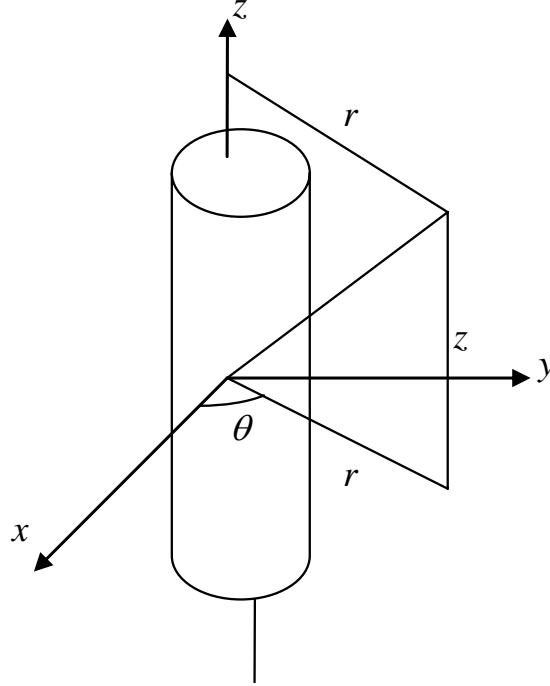
وللتعرف على فائدة التوافقيات المنطقية السابقة للمسائل الكهروستاتيكية ذات التماثل الكروي سندرس حالة كرة موصلة غير مشحونة موضوعة في مجال كهربائي منتظم  $E_0$ .

( z ) - -

بينما فيما سبق حل معادلة لابلاس في بعدين لنظام إحداثيات كروية، وهو هام جداً في المسائل التي تتضمن موصلات كروية. وبنفس الأهمية فإن كثيراً من المسائل تتضمن موصلات أسطوانية، كالأسطوانات والأسلاك المعدنية وبالتالي نحتاج لحل معادلة لابلاس في نظام الإحداثيات الاسطوانية. ونظراً لأننا سنعتبر  $z$  ثابتاً، فإن حلول معادلة

لابلاس تتلاءم فقط مع الموصلات الاسطوانية الطويلة ولا تتلاءم مع القصيرة منها.

لنفرض موصلا اسطوانيا موضوعا بحيث ينطبق محوره مع المحور  $z$  كما في الشكل رقم (٨-٢).



الشكل رقم (٨-٢)

ولنفرض أن جهد هذا الموصل لا يعتمد على  $z$  ، وبالتالي فإن معادلة

لابلاس في الإحداثيات الأسطوانية التالية:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

تصبح في بعدين على النحو التالي:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2-37)$$



وبحل المعادلة التفاضلية الجزئية (2-37)، سنستخدم طريقة فصل المتغيرات وذلك بالتعويض عن:

$$\varphi(r, \phi) = Y(r) \cdot S(\phi) \quad (2-38)$$

من المعادلة (2-38) فإن:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = S \frac{dY}{dr}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = Y \frac{dS}{d\phi} \quad , \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = Y \frac{d^2 S}{d\phi^2}$$

وبالتعويض عن المشتقات الجزئية السابقة في المعادلة (2-37) واستبدال المشتقات الجزئية فيها بمشتقات اعتيادية نظرا لاعتماد كل دالة على متغير واحد فقط. نحصل على:

$$\frac{S}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dY}{dr} \right) + \frac{Y}{r^2} \frac{d^2 S}{d\phi^2} = 0$$

$$\frac{r}{Y} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dY}{dr} \right) = - \frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\phi^2}$$

والطريقة الوحيدة لتساوي طرفي المعادلة السابقة هو أن يتساوى كل طرف فيها مع ثابت الفصل  $K$ ، ولذلك فإن:

$$- \frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\phi^2} = K$$

وكذلك

$$\frac{r}{Y} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dY}{dr} \right) = K$$

ويمكن كتابة العلاقتين السابقتين على النحو التالي:

$$\frac{d^2 S}{d\phi^2} + KS = 0 \quad (2-39)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dY}{dr} \right) - K \frac{Y}{r} = 0 \quad (2-40)$$

أما المعادلة (2-39) والتي تعتمد على  $\phi$  فقط فهي بسيطة الحل نوعاً ما،  
ولها حلان:

$$S = \cos(\sqrt{K}\phi) \quad ; \quad S = \sin(\sqrt{K}\phi) \quad (2-41)$$

ولنختبر الحل الأول  $S = \cos(\sqrt{K}\phi)$  فيما إذا كان يحقق المعادلة (2-40) أم لا !

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\phi^2} [\cos(\sqrt{K}\phi)] + K \cos(\sqrt{K}\phi) \\ &= \frac{d}{d\phi} [-\sin(\sqrt{K}\phi) \cdot \sqrt{K}] + K \cos(\sqrt{K}\phi) \\ &= -K \cos(\sqrt{K}\phi) + K \cos(\sqrt{K}\phi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن، فإن  $\cos(\sqrt{K}\phi)$  تحقق المعادلة (2-40) وهي حل لها. وكذلك الحال بالنسبة للحل الآخر  $\sin(\sqrt{K}\phi)$ . وحتى يكون هناك معنى فيزيائي، يجب أن يكون كل حل بمثابة دالة وحيدة القيمة للمتغير  $\phi$ . أي يجب أن يكون لها نفس القيمة مع كل دورة كاملة ( $2\pi$ )، أو بمعنى آخر:

$$\begin{aligned} \cos \sqrt{K} (\phi + 2\pi) &= \cos \sqrt{K} \phi \\ \sin \sqrt{K} (\phi + 2\pi) &= \sin \sqrt{K} \phi \end{aligned} \quad \text{وكذلك}$$

ولا تتحقق الحالة السابقة إلا عندما تكون  $K = n^2$  فقط. حيث أن  $n$  عدداً صحيحاً موجباً.

وهكذا يمكننا الآن كتابة الحلين في المعادلة (2-41) على النحو

التالي:

$$S(\phi) = A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2-42)$$

أما المعادلة (2-40) والتي تعتمد على  $r$  فقط فلها حلان:

$$\left. \begin{aligned} Y(r) &= r^n \\ Y(r) &= \frac{1}{r^n} \end{aligned} \right\} n = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (2-43)$$

وبالتالي يمكننا وضع الحلين السابقين للمعادلة (2-40) على النحو التالي:

$$Y(r) = C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad \dots (2-44)$$

والآن بعد أن أوجدنا حل المعادلتين (2-39) ، (2-40) يمكننا الحصول على  $\varphi(r, \theta)$  بتركيب الحلين (ويطلق عليها اسم التوافقيات الأسطوانية) حسب المعادلة (2-38) ليكون الحل لمعادلة لابلاس (المعادلة (2-37)) على النحو التالي:

$$\varphi(r, \phi) = (A_n \cos \phi + B_n \sin \phi) (C_n r^n + D_n r^{-n}) \quad \dots (2-45) \quad \text{حيث}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

لاحظ أن قيم  $n$  لا تتضمن الصفر في المعادلة (2-45). ففي حالة  $n = 0$  فإن  $K = n^2 = 0$  وبالتالي فإن المعادلة (2-40) تؤول إلى ما يلي:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dY}{dr} \right) - K \frac{Y}{r} = \frac{d}{dr} \left( r \frac{dY}{dr} \right) = 0$$

$$\therefore r \frac{dY}{dr} = A'_0$$

ومنها

$$dY = A'_0 \frac{dr}{r}$$

$$\therefore Y = A'_0 \ln r + A_0 \quad \dots (2-46)$$

حيث  $A'_0$  و  $A_0$  ثوابت.

وهكذا يمكننا إضافة الحل السابق (للحالة  $n = 0$ ) للحل المعطى بالمعادلة (2-37) ويصبح لدينا حلاً عاماً لمعادلة لابلاس يتضمن جميع قيم  $n$  الممكنة ( $n \geq 0$ ) على النحو التالي:

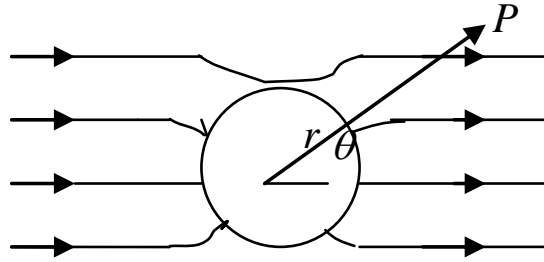
$$\varphi(r, \phi) = A_0 + A'_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi)(C_n r^n + D_n r^{-n}) \quad \dots (2-47)$$

حيث  $A_n$ ،  $B_n$ ،  $C_n$  و  $D_n$  ثوابت لقيمة  $n \geq 1$  ويمكن تحديدها من الشروط الحدودية للمسألة. أما الحد الأول والثاني في المعادلة (2-47) فيمثلان الجهد عندما  $n = 0$ .

ومن التطبيقات على ذلك وجود موصل أسطواني طويل في مجال كهربائي منتظم.

-

إذا فرضنا أن كرة موصلة غير مشحونة وضعت في مجال كهربائي منتظم  $E_0$  كما في الشكل رقم (2-8) فإن خطوط المجال الكهربائي المنتظم تكون متوازية. ولكن وجود الكرة الموصلة فيه سيغير المجال بطريقة تجعل خطوط المجال ترتطم بسطح الموصل لتكون عمودية على سطح تساوي الجهد المكون للسطح فإذا افترضنا أن اتجاه المجال الكهربائي المنتظم كان في اتجاه المحور  $Z$  وهو الاتجاه القطبي واعتبرنا نقطة الأصل لنظام الإحداثيات المستخدم (النظام الكروي) منطبق على مركز الكرة. عندئذ يتضح من طبيعة التماثل في المسألة أن الجهد لا يعتمد على الزاوية  $\phi$



الشكل رقم (٢-٨)

لنفرض أن نصف قطر الكرة  $a$  وهذا البعد عن نقطة الأصل هو بعد سطح تساوي الجهد والمساوي لجهد الكرة  $\varphi_0$  ونريد الآن إيجاد حل لمعادلة لابلاس في النقطة الواقعة خارج الكرة والذي يؤول إلى القيمة  $\varphi_0$  على سطحها.

ويمكن كتابة الحل العام لمعادلة لابلاس المعطى بالمعادلة (2-37)

على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r P_1(\theta) + \frac{B_1}{r^2} P_1(\theta) \\ & + A_2 r^2 P_2(\theta) + \frac{B_2}{r^3} P_2(\theta) + \dots \end{aligned}$$

ولكن:

$$P_1(\theta) = \cos \theta \quad , \quad P_2(\theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \varphi(r, \theta) = & A_0 + \frac{B_0}{r} + \left[ A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right] \cos \theta \\ & + \frac{1}{2} \left[ A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^3} \right] [3 \cos^2 \theta - 1] + \dots \quad \dots (2-48) \end{aligned}$$

ونريد الآن أن نبحث عن الحدود اللازمة والحدود غير اللازمة في المعادلة (2-48)، وذلك بتطبيق الشروط الحدودية للمسألة.

بما أن المجال الكهربائي منتظم فإن:

$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -E_0 z + \text{cons.}$$

بالتعويض عن  $z$  بالمقدار  $r \cos \theta$ ، فإن المعادلة السابقة تصبح

$$\varphi \Big|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta + \text{const.} \quad (2-49)$$

والمعادلة (2-49) صحيحة في حالة عدم وجود الكرة داخل المجال الكهربائي، أو بوجود الكرة ولكن في مناطق بعيدة عنها حيث يكون التشوه الحاصل في المجال الكهربائي ضئيلاً جداً، ويمكن بالتالي اعتباره منتظماً بعيداً عن الكرة. وبمقارنة المعادلة (2-49) مع المعادلة (2-48) فإن:

$$\begin{aligned} A_1 &= -E_0 \\ A_i &= 0 \quad i = 2, 3, \dots, \infty \end{aligned}$$

كذلك  $B_0 = 0$  لعدم وجود شحنة محصلة على الكرة.

أما عندما  $r = a$ ، فإن الجهد على سطح الكرة ثابت ولا يعتمد

على قيمة  $\theta$ . وبالتالي يجب وضع الثوابت  $B_i$  مساوية للصفر. أي أن:

$$B_i = 0 \quad , \quad i = 2, 3, \dots$$

وهكذا تؤول المعادلة (2-48) إلى ما يلي:

$$\varphi(r, \theta) = A_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta \quad , \quad r \geq a \quad \dots (2-50)$$

$$\therefore \varphi(r, \theta) \Big|_{r=a} = \varphi_0$$

فإن:

$$\therefore A_0 = \varphi_0$$

$$-E_o a \cos \theta + \frac{B_1}{a^2} \cos \theta = 0$$

ومنها فإن:

$$B_1 = E_o a^3$$

وبالتعويض عن  $B_1$  ،  $A_o$  في المعادلة (2-50) نحصل على  $\varphi$

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_o + \left( \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) E_o r \cos \theta \quad (2-51)$$

والمعادلة (2-51) تحقق الشروط الحدودية تماما. حيث:

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_o \quad ; \quad r = a$$

$$\varphi(r, \theta) = -E_o r \cos \theta + \varphi_o \quad ; \quad r \gg a$$

وبعد أن أوجدنا الجهد الكهروستاتيكي يمكننا الآن حساب المجال الكهربائي عند جميع النقاط في الفراغ حول الكرة. ويتم ذلك على النحو

التالي:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[ \varphi_o + \left( \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) E_o r \cos \theta \right] \\ &= -\left[ -2 \frac{a^3}{r^3} E_o \cos \theta - E_o \cos \theta \right] \\ &= E_o \cos \theta \left( 1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \right) \quad \dots\dots(2-52) \end{aligned}$$

$$E_r|_{r \rightarrow \infty} = E_o \cos \theta$$

$$E_r|_{r=a} = 3E_o \cos \theta$$

أما مركبة المجال الكهروستاتيكي الأخرى ( $E_\theta$ ) فيمكن إيجادها

على النحو التالي:

$$E_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \phi_0 + \left( \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) E_0 r \cos \theta \right]$$

$$= -\frac{1}{r} \left[ -\left( \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) E_0 r \sin \theta \right]$$

$$\therefore E_{\theta} = -E_0 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad \dots(2-53)$$

$$E_{\theta} \Big|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 \sin \theta$$

$$E_{\theta} \Big|_{r=a} = 0$$

ولا نتوقع أن تكون كثافة الشحنة السطحية على الكرة منتظمة، بل تختلف من مكان إلى آخر على السطح ويمكن إيجادها على النحو التالي:

بتطبيق قانون غاوس على السطح الموصل فإن المجال الكهربائي العمودي على السطح ( $E_r$ ) يعطى بالعلاقة:

$$\oiint \vec{E}_r \cdot d\vec{a} = \int \frac{\sigma}{\epsilon_0} da$$

$$E_r \square A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} A \Rightarrow E_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

وبالتالي فإن كثافة الشحنة السطحية ( $\sigma$ ) من العلاقة السابقة تعطى بالعلاقة:

$$\sigma = \epsilon_0 E_r \Big|_{r=a}$$

وبالتعويض عن  $E_r$  عندما  $r = a$  في المعادلة (2-52) في العلاقة السابقة نحصل على:

$$\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad \dots(2-54)$$



كما يمكننا إيجاد الشحنة الكلية على الكرة على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
 q &= \int \sigma da = \int_0^\pi 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta \cdot 2\pi a^2 \sin \theta d\theta \\
 &= 6\pi\varepsilon_0 a^2 E_0 \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \\
 &= 6\pi\varepsilon_0 a^2 E_0 \int_0^\pi \sin \theta d(\sin \theta) \\
 &= 6\pi\varepsilon_0 a^2 E_0 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^\pi = 0
 \end{aligned}$$

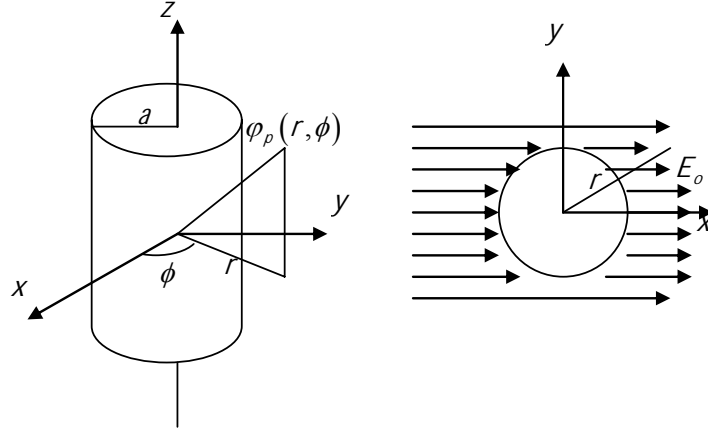
والنتيجة التي حصلنا عليها ليست غريبة. فالشحنة محفوظة وقد افترضنا أصلاً أن الكرة الموصلة كانت غير مشحونة، والشحنات التي نلاحظها هي شحنة تأثيرية ومجموع الشحنة الموجبة يساوي مجموع الشحنة السالبة. وبالتالي فإن محصلة الشحنة على الكرة تساوي صفراً قبل وضع الكرة في المجال الكهربائي وبعد وضعها.

-

تطبيقاً على حل معادلة لابلاس في بعدين لنظام الإحداثيات الأسطوانية يمكننا وضع موصل أسطواني طويل غير مشحون في مجال كهربائي منتظم  $E_0$ ، كما في الشكل رقم (٢-٩).

تكون خطوط المجال الكهروستاتيكي متوازية قبل وضع الموصل نظراً لأن المجال ثابت. ولكن وضع موصل فيه سيغير المجال في المناطق القريبة من الموصل بطريقة تجعل الخطوط تدخل في السطح وعمودية عليه وتخرج منه عمودية أيضاً؛ نظراً لأن الموصل يشكل سطح تساوي للجهد وبالتالي يجب على المجال أن يتعامد دائماً مع خطوط تساوي الجهد تماماً

كما هو الحال للكرة الموصلة الموضوعة داخل مجال كهربائي والذي تم مناقشته سابقا.



الشكل رقم (٢-٩)

إن الشروط الحدودية للمسألة قيد الدراسة هي على النحو التالي:

(يجب أن يكون جهد الموصل في جميع نقاطه متساويا)

$$\varphi = (r, \phi) \Big|_{r=a} = \varphi_0$$

وبما أن المجال  $\vec{E}$  ثابت في الاتجاه  $x$ . أي أن  $\vec{E} = E_0 \hat{x}$  فإن:

$$\varphi(r, \phi) \Big|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \phi + \text{cons.}$$

وبما أن الموصل غير مشحون أصلا (محصلة الشحنة قبل وبعد وضع الموصل في المجال = صفر) فإن الحد  $A'_0 \ln r$  في المعادلة (2-47) يساوي صفرا. لأن هذا الحد لا ينتج إلا إذا كان هناك شحنة محصلة على الموصل. وبالتالي فإن:

$$A'_0 \ln r = 0$$

وبما أن  $r \neq 0$  فإن:

$$A'_0 = 0$$

ولهذا تصبح المعادلة (2-47) للحالة قيد الدراسة على النحو التالي:

$$\varphi(r, \phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) \left( C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right)$$

وتؤول العلاقة السابقة عندما  $n=1$  إلى ما يلي:

$$\varphi(r, \phi) = A_0 + (A_1 \cos \phi + B_1 \sin \phi) \left( C_1 r + \frac{D_1}{r} \right) \quad \dots (2-55)$$

$$\varphi(r, \phi) = A_0 + A_1 C_1 r \cos \phi + \frac{A_1 D_1}{r} \cos \phi + B_1 C_1 r \sin \phi + \frac{B_1 D_1}{r} \sin \phi$$

ولكن

$$\varphi(r, \phi) \Big|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \phi + const. \quad (2-56)$$

وبمقارنة المعادلتين (2-55) و (2-56) ببعضهما نجد أن:

$$B_1 = 0$$

وكذلك

$$A_1 C_1 r \cos \phi = -E_0 r \cos \phi$$

ومنها فإن:

$$A_1 C_1 = -E_0$$

ونظراً لأن  $\varphi_0 = \varphi(r, \phi)$  عندما  $r = a$  فإن:

$$\varphi(a, \phi) = \varphi_0 = A_0 + A_1 C_1 a \cos \phi + \frac{A_1 D_1}{a} \cos \phi$$

$$\therefore A_1 C_1 a \cos \phi + \frac{A_1 D_1}{a} \cos \phi = 0$$

$$\therefore A_1 C_1 a = -\frac{A_1 D_1}{a}$$

$$\therefore A_1 C_1 = -\frac{A_1 D_1}{a^2} = -E_0$$

$$\therefore A_1 D_1 = E_0 a^2$$

وبالتعويض عن قيم الثوابت ( $A_1C_1$  ،  $B_1$  ،  $A_0$ ) و ( $A_1D_1$ ) التي تم إيجادها في المعادلة (2-55) نجد أن:

$$\varphi(r, \phi) = \varphi_0 - E_0 r \cos \phi + E_0 \frac{a^2}{r} \cos \phi$$

$$\varphi(r, \phi) = \varphi_0 + E_0 r \cos \phi \left( \frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \quad r \geq a \quad \dots (2-57)$$

لاحظ أن المعادلة (2-57) تحقق الشروط الحدودية تماما للمسألة. بعد أن توفرت لدينا معادلة الجهد الكهروستاتيكي  $\varphi(r, \phi)$  لأية نقطة حول الموصل الأسطواني، يمكننا الآن حساب المجال الكهربائي في أية نقطة وخصوصا في المناطق التي تشوه فيها المجال الكهربائي نتيجة وضع الموصل. ويتم ذلك على النحو التالي:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi(r, \phi)}{\partial r} \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[ \varphi_0 + E_0 r \cos \phi \left( \frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \right] \\ \therefore E_r &= + \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) E_0 \cos \phi \end{aligned}$$

لاحظ من العلاقة السابقة أن:

$$\begin{aligned} E_r|_{r \rightarrow \infty} &= E_0 \cos \phi \\ E_r|_{r=a} &= 2E_0 \cos \phi \end{aligned}$$

أما المركبة الأخرى للمجال ( $E_\phi$ ) فيمكن إيجادها بنفس الطريقة السابقة أي أن:

$$\begin{aligned}
 E_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r, \phi)}{\partial \phi} \\
 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \varphi_o + E_o r \cos \phi \left( \frac{\partial^2}{r^2} - 1 \right) \right] \\
 \therefore E_\phi &= -\left( 1 - \frac{\partial^2}{r^2} \right) E_o \sin \phi
 \end{aligned}$$

كما أن:

$$E_\phi \Big|_{r \rightarrow \infty} = -E_o \sin \phi$$

$$E_\phi \Big|_{r=a} = 0$$

(ومعنى ذلك أنه لا توجد مركبة مجال على السطح باتجاه  $\phi$  لأن المجال عمودي على السطح)

كما يمكننا الآن حساب كثافة الشحنة السطحية  $\sigma$  (بدلالة  $\phi$ )

طبعا وليس لها علاقة بالمتغير  $r$  على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \varepsilon_o E_r \Big|_{r=a} \\
 &= \varepsilon_o [2E_o \cos \phi] \\
 &= 2\varepsilon_o E_o \cos \phi \\
 \therefore \sigma &= 2\varepsilon_o E_o \cos \phi
 \end{aligned}$$

وللتأكد فقط من أن الشحنة الكلية على الموصل الأسطوانى تساوي صفرا على الرغم من تولد شحنة تأثيرية عليه (الشحنة التأثيرية الموجبة = الشحنة التأثيرية السالبة ومحصلتها تساوي صفرا)، ويتم ذلك على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
q &= \int \sigma da \\
&= \int_0^{2\pi} (2\varepsilon_0 E_o \cos \phi) (l a d\phi) \\
&= 2\varepsilon_0 E_o a l \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \\
&= 2\varepsilon_0 E_o a l [\sin \phi]_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(محصلة الشحنة على الموصل = صفر)

-

### (Electrostatic Images)

طريقة الصور الكهروستاتيكية عبارة عن أسلوب آخر للحصول على حل معين لبعض المسائل الكهروستاتيكية وذلك بدون حل لأية معادلة تفاضلية. وهي طريقة من اختراع اللورد كلفن، وهي طريقة ليست عامة لكن هناك عديد من المسائل التي يمكن حلها بها، وبالتالي يجب علينا التعرف عليها ودراستها. ويتم في هذه الطريقة استبدال أي توزيع معقد من الشحنات، لغرض الحسابات فقط بشحنة نقطية وحيدة، أو توزيع شحنات أبسط يطلق عليه الصورة (Image) وعلينا أن نتذكر دائماً بأن هذه الشحنة حقيقية غير موجودة ولكنها أسلوب فقط لحل المسائل.

لنفرض أن الجهد  $\varphi(r)$  لمسألة كهروستاتيكية يعطي عند نقطة

معينة على النحو التالي:

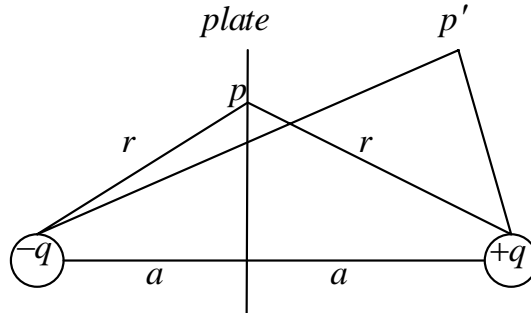
$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_1(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}') da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \dots\dots (2-58)$$

حيث تمثل  $\varphi_1(\vec{r}')$  دالة معينة سهلة الحساب. وليكن التكامل في المعادلة السابقة يمثل مساهمة الشحنة السطحية على جميع الموصلات التي

تتضمنها المسألة في تكوين الجهد. وسنفرض بأن كثافة الشحنة السطحية  $\sigma(\vec{r}')$  غير معروفة لنا، وبالتالي لا يمكننا إجراء التكامل في المعادلة السابقة. وهنا تكمن فائدة استخدام الصور الكهروستاتيكية فالحد الذي يحتوي على  $\sigma(\vec{r}')$  يمكن الاستعاضة عنه بالجهد  $\varphi_2(\vec{r}')$  الناشئ عن توزيع شحني معين. وهذا بالطبع ممكن طالما كانت سطوح جميع الموصلات تتطبق على سطوح تساوي الجهد التي تمثل مجموع الجهدين  $(\varphi_1 + \varphi_2)$  وتدعى الشحنات التي تولد الجهد  $\varphi_2(\vec{r}')$  بشحنات الصورة (Image Charges). وفيما يأتي بعض الأمثلة على حل المسائل بهذه الطريقة.

- -

المثال التالي هو من أبسط الأمثلة على صور الشحنة ونريد فيه حساب الشحنة التأثيرية السطحية على موصل متصل مع الأرض (مؤرض) نتيجة وضع شحنة نقطية مثل  $q$  على بعد  $a$  من السطح. لنفرض شحنتين نقطيتين متساويتين بالمقدار ومتضادتين بالإشارة موضعين على بعد  $a$  من الصفيحة كما في الشكل رقم (١٠-٢).



الشكل رقم (١٠-٢)

إن الجهد الناشئ عن هاتين الشحنتين يتلاشى عند جميع النقاط الواقعة على السطح لأن بعد أية نقطة مثل  $P$  عن  $q$  و  $-q$  متساوي ويساوي صفر. أي أننا إذا تركنا الصفيحة في الشكل رقم (٢-١٠) أو نزعناها بالكامل من الشكل فلن يؤثر ذلك بأي شكل من الأشكال على خطوط القوة (المجال) الأصلية الناشئة عن الشحنتين. وذلك لأن جهد الموصل يساوي صفراً وجهد الموضع الذي وضع فيه ذلك الموصل يساوي صفراً. وبالتالي تبقى خطوط المجال الخارجة من الشحنة  $q$  والداخلية في الموصل المؤرض تتبع نفس المسار السابق بوضع الموصل أو عدمه، أي أن المسألة الأصلية وهي عبارة عن شحنة نقطية وموصل مؤرض تكافئ تماماً شحنتين نقطيتين  $+q$  و  $-q$  على بعد  $2a$  من بعضهما. أي أننا استبدلنا الموصل المؤرض بشحنة نقطية  $q'$  قيمتها في هذه الحالة  $-q$  وعلى بعد  $a$  من السطح في الاتجاه المعاكس للشحنة  $q$ . ويطلق على هذه الشحنة ( $q'$ ) بصورة الشحنة (charge image) ويجب وضعها خلف الصفيحة المؤرصة وكأنها صورة للشحنة الحقيقية  $q$ .

بالاستعانة بصورة الشحنة يمكننا الآن حساب كثافة الشحنة التأثيرية  $\sigma$  على الصفيحة الموصلة والتي سببها الشحنة النقطية  $q$ . ولعمل ذلك دعنا نحسب الجهد الكهروستاتيكي  $\phi$  عند أية نقطة مثل  $P'$  في الشكل رقم (٢-١٠) الناتج عن الشحنة الحقيقية  $q$  وصورتها  $-q$  على افتراض أن الشحنتين على المحور  $x$  والصفيحة المؤرصة واقعة في المستوى  $yz$ ، كما يلي:



$$\begin{aligned} \varphi(p') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi(p') &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right] \end{aligned} \quad \dots(2-59)$$

بعد أن وجدنا الجهد يمكننا الآن إيجاد المجال الكهربائي ويتم ذلك على النحو التالي:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right) \right] \\ E_x &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{2} \left\{ (x-a)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{-3/2} \cdot 2(x-a) + \frac{1}{2} \left\{ (x+a)^2 + y^2 + z^2 \right\}^{-3/2} \cdot 2(x+a) \right] \\ \therefore E_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x-a}{\left[ (x-a)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} - \frac{x+a}{\left[ (x+a)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad \dots(2-60)$$

ولكننا بحاجة لحساب المجال الكهربائي على سطح الصفيحة ( $x = 0$ ) وذلك لإيجاد كثافة الشحنة  $\sigma$ . وبالتعويض في المعادلة السابقة عن ( $x = 0$ ) نحصل على:

$$E_x|_{x=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2qa}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad \dots\dots(2-61)$$

أما  $E_y, E_z$  فكلاهما يساوي صفراً لأن المجال الكهروستاتيكي عمودي دائماً على سطح الموصل، وعمودي على سطح تساوي الجهد الممثل بالسطح. ويمكنك التأكد من قيمتها أيضاً من إيجاد المشتقة الأولى للجهد  $\phi$  من المعادلة (2-59) مرة بالنسبة لـ  $y$  لحساب  $E_y$  ومرة بالنسبة لـ  $z$  لحساب  $E_z$

$$E_y = E_z = 0$$

وحسب قانون جاوس عند تطبيقه على الصفيحة الموصلة فإن المجال الكهربائي قرب سطحها يعطي بالعلامة:

$$E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \dots\dots(2-62)$$

من المعادلتين (2-60) و (2-62) نجد أن:

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2qa}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

ومنها فإن كثافة الشحنة السطحية التأثيرية على الصفيحة تعطي بالعلاقة:

$$\sigma = -\frac{aq}{2\pi(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad \dots\dots(2-63)$$

وهكذا بعد أن أوجدنا  $\sigma$  يمكننا الآن إيجاد الشحنة التأثيرية على الصفيحة:

$$Q = \int \sigma da \quad \dots\dots(2-64)$$

لنأخذ حلقة على الصفيحة نصف قطرها  $r$  وسمكها  $dr$  وبالتالي فإن مساحتها.

$$da = 2 \pi r dr$$

وبالتعويض عن  $\sigma$  ،  $da$  في المعادلة (2-64) نجد أن:

$$Q = \int \frac{-aq \cdot 2\pi r dr}{2\pi(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$r^2 = y^2 + z^2$$

$$\therefore Q = -aq \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} = \left[ \frac{aq}{(a^2 + r^2)^{1/2}} \right]$$

$$Q = -q$$

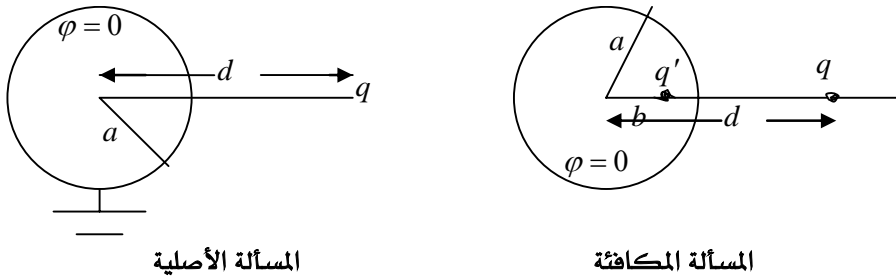
ونلاحظ من العلاقة السابقة أن الشحنة التأثيرية على الصفيحة الموصلة تساوي الشحنة الموضوعية على يمين الصفيحة. وهذا متوقع.

ويمكن تلخيص فكرة المسألة التي سبق حلها على النحو التالي:  
بعد أن استعضنا عن الصفيحة الموصلة المؤرضة بسطح لتساوي الجهد بالشكل والمكان المناسبين، وهذا يتوجب علينا وضع صورة للشحنة للحفاظ على خطوط المجال الأصلية، بعدها قمنا بحساب المجال الكهربائي من الجهد الكهربائي عند أية نقطة في الفراغ، ومنها أوجدنا

المجال عند السطح. وبما أن المجال أصبح معلوماً، فإنه بالإمكان حساب كثافة الشحنة على السطح، وأخيراً يمكن حساب الشحنة من الكثافة.

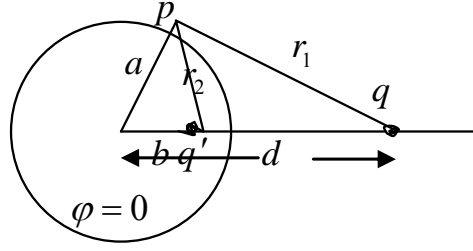
- -

يبين الشكل رقم (٢-١١) كرة موصلة مؤرضة (متصلة بالأرض) وموضوع بالقرب منها شحنة نقطية  $q$  على بعد  $d$  من مركزها، والمطلوب حساب توزيع الشحنات التأثيرية على سطح الكرة بسبب الشحنة  $q$ .



الشكل رقم (٢-١١)

لنفرض سطحاً لتساوي الجهد جهده يساوي جهد الكرة الأصلية ( $\varphi = 0$ ) موضوع في المكان المناسب (كما في الشكل رقم (٢-١٢) المسألة المكافئة) وحتى يكون الجهد على هذا السطح الوهمي (سطح تساوي الجهد) مساوياً للصفر، علينا وضع شحنة نقطية  $q'$  في المكان المناسب حتى تكافئ تأثير الشحنة  $q$ . وليكن بعد الشحنة  $q'$  عن مركز سطح تساوي الجهد يساوي  $b$ . وعلينا الآن حساب مقدار هذه الشحنة ( $q'$ ) وبعدها ( $b$ ). ويتم ذلك على النحو التالي:



الشكل رقم (٢-١٢)

إن جهد أية نقطة على سطح تساوي الجهد ( $\phi = 0$ ) في الشكل رقم (٢-١٢) يعطى بالعلاقة:

$$\phi_p = 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r_2}$$

$$q' = -\left(\frac{r_2}{r_1}\right)q \quad \dots(2-65)$$

$$r_1 = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}$$

$$r_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

وبالتعويض عن  $r_1$  ،  $r_2$  في المعادلة (2-65) نحصل على:

$$q' = -q \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta}} \quad \dots(2-66)$$

ونلاحظ من المعادلة (2-66) وجود مجهولين فيها وهما  $q'$  و  $b$  وليس بالضرورة وجود معادلتين مختلفتين لتحديد  $q'$  ،  $b$  ولكننا سنستخدم نفس المعادلة لإيجادهما نظرا لأن تلك المعادلة صحيحة لجميع قيم  $\theta$

وبالتالي سنكوّن معادلتين منها لقيمتين مختلفتين للزاوية  $\theta$  وذلك عندما  $\pi = 0$  و  $\pi = \theta$  على النحو التالي:

$$q' = -q \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad}}$$

$$= -q \frac{a-b}{d-a} \quad , \quad \theta = 0 \quad \dots (2-67a)$$

$$q' = -q \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad}}$$

$$= -q \frac{a+b}{d+a} \quad \theta = \pi \quad \dots (2-67b)$$

ومن المعادلتين السابقتين، نجد أن:

$$\frac{a-b}{d-a} = \frac{a+b}{d+a} \Rightarrow b = \frac{a^2}{d} \quad \dots (2-68)$$

وبالتعويض عن قيمة  $b$  من المعادلة (2-68) في المعادلة (2-67a) و (2-67b) نجد أن:

$$q' = -q \frac{a}{d} \quad \dots (2-69)$$

أي أن صورة الشحنة  $q'$  عبارة عن  $-q \frac{a}{d}$  ويجب أن توضع على بعد  $\frac{a^2}{d}$  من مركز سطح تساوي الجهد، ونلاحظ أن صورة الشحنة  $q'$  هي عكس الشحنة  $q$  كما نلاحظ بأننا إذا عوضنا عن قيمتها وقيمة  $b$  في معادلة الجهد سنجد أن الجهد  $\phi_p$  يساوي صفراً لأية نقطة على سطح تساوي الجهد.

بعد أن أوجدنا الشحنة  $q'$  وبعدها عن مركز سطح تساوي الجهد ، يمكننا الآن حساب الجهد الكهربائي في أي نقطة نشاء وليس بالضرورة على سطح تساوي الجهد.

إن الجهد الكهربائي  $\phi_{p'}$  في النقطة  $P'$  الناتج عن الشحنتين  $q$  ،

$-q \frac{a}{d}$  ، يساوي:

$$\phi_{p'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \frac{a}{d}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{a^2}{d}\right)^2 - 2r\left(\frac{a^2}{d}\right) \cos\theta}}$$

$$\phi_{p'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta}} - \frac{a}{\sqrt{d^2 r^2 + a^4 - 2ra^2 d \cos\theta}} \right] \dots(2-70)$$

ويمكننا إيجاد المجال الكهربائي من الجهد الكهربائي في المعادلة (2-70) وذلك بتطبيق المعادلة  $E = -\vec{\nabla} \phi$  على النحو التالي:

$$E_r = \frac{\partial \phi_{p'}}{\partial r} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{(r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta)^{-1/2}}{-a(d^2 r^2 + a^4 - 2ra^2 d \cos\theta)^{-1/2}} \right]$$

$$= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} \frac{(2r - 2d \cos\theta)}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta)^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{2rd^2 - 2ad \cos\theta}{a (r^2 d^2 + a^4 - 2ra^2 d \cos\theta)^{3/2}} \right]$$

ولكننا بحاجة إلى قيمة المجال  $E_r$  عند السطح ( $r = a$ ) فمن المعادلة السابقة:

$$\begin{aligned}
 E_r|_{r=a} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{a-d\cos\theta}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} - \frac{a^2d^2-a^3d\cos\theta}{(a^2d^2+a^4-2a^3d\cos\theta)^{3/2}} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{a-d\cos\theta}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} - \frac{(a^2d^2-a^3d\cos\theta)/a^3}{(d^2+a^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{a-d\cos\theta - \frac{d^2}{a} + d\cos\theta}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} \right] \\
 &= \frac{q(a^2-d^2)}{4\pi\epsilon_0 a (a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} \\
 E_r|_{r=a} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{d^2-a^2}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} \quad \dots\dots(2-71)
 \end{aligned}$$

ومن قانون جاوس، فإن كثافة الشحنة السطحية تعطي العلاقة:

$$\sigma = \epsilon_0 E_r|_{r=a}$$

وبالتعويض عن  $E_r$  من المعادلة (2-71) في المعادلة السابقة، نحصل على:

$$\sigma = \epsilon_0 E_r|_{r=a} = \frac{q(d^2-a^2)}{4\pi a (a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} \quad \dots\dots(2-72)$$

وإذا كاملنا الشحنة السطحية  $\sigma$  بالنسبة للمساحة فإننا نجد الشحنة

التأثيرية  $Q'$  على سطح الكرة على النحو التالي:



$$\begin{aligned}
 Q' &= \int \sigma dA \\
 &= \int_0^\pi \frac{q(d^2 - a^2)}{4\pi a(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \cdot 2\pi a^2 \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{qa(d^2 - a^2)}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \\
 &= \frac{qa(d^2 - a^2)}{ad} \left[ \frac{1}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{1/2}} \right]_0^\pi \\
 \therefore Q' &= -\frac{qa}{d}
 \end{aligned}$$

ونلاحظ من النتيجة السابقة أن الشحنة المحتثة الكلية على الكرة الموصلة الحقيقية تساوي صورة الشحنة  $q'$  (انظر المعادلة (2-69)).  
 يمكننا إعادة حل المثال السابق لكرة مشحونة أصلاً ( $\varphi_0 \neq 0$ )  
 الجهد قبل وضع الكرة بالقرب من الشحنة النقطية) وفي هذه الحالة نضع  
 شحنة الكرة الأصلية في مركزها ولتكن  $q''$  أي أن جهد الكرة أصلاً  
 $\varphi_0$  يساوي:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{a} \quad \dots(2-73)$$

ويصبح الجهد الكهربائي  $\varphi$  في النقطة  $p'$  ناتج عن ثلاث شحنات هي  
 $q, q', q''$ ، ويعطي الجهد في هذه الحالة بالعلاقة:

$$\varphi_{p'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{q''}{r} \right] \quad \dots(2-74)$$

ويمكننا حصر الحالات المختلفة للكرة الموصلة على النحو التالي:  
 لنفرض أن الشحنة الكلية على الكرة الموصلة وجدناها تساوي  $Q_s$ .  
 وبالتالي فإن هذه الشحنة تساوي مجموع الشحنات (المحتثة والموجودة  
 أصلا) وتساوي:

$$Q_s = q' + q'' \quad \dots(2-75a)$$

فإذا وجدنا الكرة:

أولاً: في وضع غير مشحون:

$$Q_s = 0$$

فإن

$$0 = q' + q''$$

$$q'' = -q' = -\left(-q \frac{a}{d}\right) = q \frac{a}{d} \quad \dots(2-75b)$$

وبالتعويض عن  $q''$  في المعادلة (2-73) نجد أن الجهد على سطح الكرة:

$$\varphi_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{d}$$

أما الجهد في أي نقطة خارج الكرة الموصلة (في النقطة  $p'$  مثلاً فإننا  
 نجده من المعادلة (2-74) بعد التعويض عن  $q''$ ,  $q'$  فيها.

ثانياً: متصلة بالأرضي (أي يجب أن يكون  $\varphi_o = 0$  إذا وصلت الكرة  
 بالأرضي).

$$\varphi_o = 0$$

$$q'' = 0$$

$$Q_s = q' = -q \frac{a}{d}$$

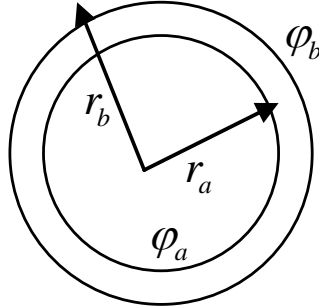
ثالثا: مشحونة بشحنة معلومة  $Q_s$

$$Q_s = q' + q''$$

$$q'' = Q_s - q'$$

( - )

قشرتان كرويتان موصولتان، أنصاف أقطارهم  $r_a$  و  $r_b$  كما في الشكل رقم (٢-١٣) وشحنتا حتى أصبح الجهد على القشرة الكروية الأولى  $\varphi_a$  وعلى القشرة الكروية الثانية  $\varphi_b$ . إذا كان  $r_b > r_a$ ، أوجد الجهد عند نقطة تقع بينهما وكذلك عند النقطة  $r > r_b$ .



الشكل رقم (٢-١٣)

الحل:

أولاً: الجهد بين القشرتين ( $r_a < r < r_b$ ).

من حل معادلة لابلاس بالإحداثيات الكروية وفي بعد واحد، فإن الجهد الكهربائي على بعد  $r$  من مركز كرة أو قشرة يعطى بالعلاقة:

$$\varphi(r) = -\frac{A}{r} + B \quad \dots\dots(1)$$

ويتطبيق الشروط الحدودية المعطاة في المسألة فإن:

$$\varphi_a = -\frac{A}{r_a} + B \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\varphi_b = -\frac{A}{r_b} + B \quad \dots\dots\dots(3)$$

ويطرح المعادلتين السابقتين من بعضهما نجد أن:

$$\varphi_a - \varphi_b = -A \left[ \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right] = -A \left[ \frac{r_b - r_a}{r_a r_b} \right]$$

$$A = \frac{(\varphi_b - \varphi_a) r_a r_b}{r_b - r_a} \quad \dots\dots\dots(4)$$

ويضرب المعادلة (2) بالمقدار  $r_a$  والمعادلة (3) بالمقدار  $r_b$  نجد أن:

$$\varphi_a r_a = -A + B r_a \quad \dots\dots(5)$$

$$\varphi_b r_b = -A + B r_b \quad \dots\dots(6)$$

ويطرح المعادلتين (5) و (6) نجد أن:

$$\varphi_b r_b - \varphi_a r_a = B r_b - B r_a$$

$$\therefore B = \frac{\varphi_b r_b - \varphi_a r_a}{(r_b - r_a)} \quad \dots\dots(7)$$

وبالتعويض عن قيمة  $A$  و  $B$  من المعادلتين (4) و (7) في المعادلة (1) نجد أن:

$$\varphi(r) = -\frac{(\varphi_b - \varphi_a) r_a r_b}{(r_b - r_a) r} + \frac{\varphi_b r_b - \varphi_a r_a}{r_b - r_a}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{r_b - r_a} \left[ \frac{(\varphi_a - \varphi_b) r_a r_b}{r} + \varphi_b r_b - \varphi_a r_a \right] \quad , \quad r_a \leq r \leq r_b$$

لاحظ من المعادلة السابقة أننا إذا عوضنا عن  $r$  بالمقدار  $r_a$  نجد أن  $\varphi = \varphi_a$  وإذا عوضنا عن  $r$  بالمقدار  $r_b$  نجد أن  $\varphi = \varphi_b$ . إذن فالحل يحقق الشروط الحدودية تماما.

ثانياً: إن الشروط الحدودية عندما  $r \leq r_b$  هي على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \varphi_b & , & & r &= r_b \\ \varphi(r) &= 0 & , & & r &= \infty \end{aligned}$$

وبالتعويض عن الشروط الحدودية السابقة في المعادلة (1) نجد أن:

$$\begin{aligned} \varphi(r = \infty) = 0 &= -\frac{A}{\infty} + B \\ B &= 0 \end{aligned}$$

كذلك

$$\varphi(r) = \varphi_b = -\frac{A}{r_b} + 0$$

$$A = -\varphi_b r_b$$

وبالتعويض عن قيمة  $A$  و  $B$  في المعادلة (1) نحصل على:

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_b r_b}{r} \quad , \quad r \geq r_b \quad \dots\dots(8)$$

لاحظ من المعادلة السابقة أننا إذا عوضنا عن  $r$  بالمقدار  $\infty$  فإن  $\varphi = 0$  ، وإذا عوضنا عن  $r$  بالمقدار  $r_b$  فإن الجهد  $\varphi = \varphi_b$ . إذن فالحل يحقق الشروط الحدودية تماما.

( - )

قشرتان اسطوانيتان متحدتا المحور، أنصاف أقطارهم  $r_a$  و  $r_b$ .  
 الجهد على الأسطوانة الأولى  $\varphi_a$  والأسطوانة الثانية  $\varphi_b$ . أوجد الجهد عند  
 نقطة تقع بين القشرتين الأسطوانيتين.

الحل:

الجهد بين القشرتين ( $r_a \leq r \leq r_b$ ) بالإحداثيات الأسطوانية ومن

حل معادلة لابلاس في بعد واحد على النحو التالي:

$$\varphi(r) = A \ln r + B \quad \dots\dots(1)$$

وبتطبيق الشروط الحدودية المعطاة في المسألة على المعادلة (1) يمكننا

إيجاد الثابتين  $A$  و  $B$  على النحو التالي:

$$\varphi_a = A \ln r_a + B \quad \dots\dots(2)$$

$$\varphi_b = A \ln r_b + B \quad \dots\dots(3)$$

ويطرح المعادلتين السابقتين من بعضهما، نجد أن:

$$\begin{aligned} \varphi_a - \varphi_b &= A [\ln r_a - \ln r_b] \\ &= A \ln \left( \frac{r_a}{r_b} \right) \end{aligned}$$

$$A = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{\ln \left( \frac{r_a}{r_b} \right)} \quad \dots\dots(4)$$

وبالتعويض عن  $A$  من المعادلة (4) في المعادلة (2) نحصل على قيمة  $B$

كما يلي:

$$\varphi_a = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{\ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)} \ln r_a + B$$

$$B = \frac{\varphi_b \ln r_a - \varphi_a \ln r_b}{\ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)} \quad \dots\dots(5)$$

وبالتعويض عن  $A$  و  $B$  في المعادلة (1) نجد أن:

$$\varphi_a = \frac{1}{\ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)} \left[ (\varphi_a - \varphi_b) \ln r + \varphi_b \ln r_a - \varphi_a \ln r_b \right] \quad ; \quad r_b \geq r \geq r_a$$

لاحظ أن المعادلة السابقة تحقق الشروط الحدودية للمسألة تماما.

( - )

إذا كانت  $\varphi_1$  حلا لمعادلة لابلاس، أثبت أن المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$$

حلول أيضا لمعادلة لابلاس.

**الحل:**

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \quad \dots\dots(1)$$

بأخذ المشتقة الجزئية الأولى للمعادلة السابقة بالنسبة للمتغير  $x$  نحصل

على:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) = 0$$

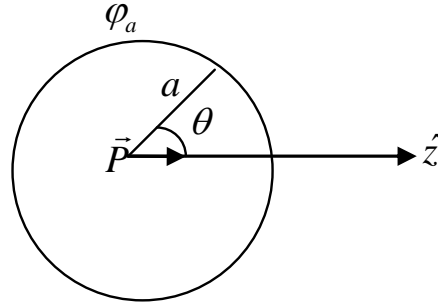
إذن  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$  هو حل لمعادلة لابلاس

وبالمثل إثبات أن  $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}$  ،  $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}$  هي حلولاً لمعادلة لابلاس.

( - )

افتراض ثنائياً قطبياً نقطياً موضوع في مركز قشرة كروية

مؤرضة كما في الشكل رقم (٢-١٤). أوجد الجهد داخل القشرة.



الشكل رقم (٢-١٤)

لنفرض أن الشاقطبي الذي عزمه  $\vec{P}$  موضوع على المحور  $Z$  وامتجه

كما في الشكل.



حل معادل لابلاس بالإحداثيات الكروية هو:

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \\ &= A_0 + \frac{B_0}{r} + \left( A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta \quad \dots\dots(1)\end{aligned}$$

وبتطبيق الشروط الحدودية على المعادلة (1) نجد أن:

$$\varphi(a, \theta) = 0 \quad \dots\dots(2)$$

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta) \Big|_{r=0} &= \varphi_{dipole} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3}\end{aligned}$$

$$\vec{P} = P \hat{z}$$

$$\therefore \varphi_{dipole} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cos \theta}{r^2}, \quad r \rightarrow 0 \quad \dots\dots(3)$$

ومن الحالة السابقة فإن جميع الحدود في المعادلة (1) عند مطابقتها

بالمعادلة (3) نجد بأنه لا حاجة لها، سوى الحد  $\frac{B_1}{r^2} \cos \theta$  حيث سيساوي

$$\frac{B_1}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cos \theta}{r^2}$$

ومنها فإن:

$$B_1 = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \quad \dots\dots(4)$$

وبتطبيق الشرط الحدودي الثاني  $\varphi(a, \theta) = 0$  على المعادلة (1) نجد أن:

$$\varphi(a, \theta) = 0 = \left( A_1 a + \frac{B_1}{a^2} \right) \cos \theta$$

$$0 = \left( A_1 a + \frac{P}{4\pi\epsilon_0 a^2} \right) \cos \theta$$

$$A_1 = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

وبالتعويض عن  $A_1$  و  $B_1$  نجد أن:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ 1 - \frac{r^3}{a^3} \right] \cos \theta$$

لاحظ أن التعويض عن  $r = a$  يعطي الجهد  $\varphi = 0$  لجميع قيم  $\theta$ . وهو جهد القشرة.

( - )

كرة موصلة غير مشحونة وضعت في مجال كهربائي منتظم. بيّن

أن الجهد الناشئ عن الكرة هو جهد ثنائي قطبي.

يعطى الجهد الكهربائي خارج كرة موصلة نصف قطرها  $a$  وغير

مشحونة أصلاً بعد وضعها في مجال كهربائي منتظم، كما في الشكل

المجاور، بالمعادلة التالية:

$$\varphi_p(r, \theta) = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad \dots\dots(1)$$

حيث:

$\varphi_0$  (الحد الأول في المعادلة): هو جهد الكرة الموصلة على سطحها وهو لا

يعتمد على الزاوية  $\theta$  لأن الكرة موصلة.

$- E_0 r \cos \theta$  (الحد الثاني في المعادلة): عائد إلى المجال الكهربائي المنتظم

الموجود أصلاً قبل وضع الكرة.

$E_o \frac{a^3}{r^2} \cos \theta$ . (الحد الثالث في المعادلة): عائد إلى جهد الكرة بعد وضعها في المجال الكهربائي المنتظم ويعمل هذا المجال على تحريك الشحنات كما في الشكل فأصبحت تبدو وكأنها ثنائيات كهربائية وبالتالي فإنها تؤثر بجهد معين عند النقطة  $P$ .  
وحيث أن جهد الثنائي الكهربائي  $\bar{P}$  في نقطة على بعد  $r$  من منتصفه يساوي:

$$\begin{aligned} \varphi_p(\theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\bar{P} \cdot \bar{r}}{r^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{P \cos \theta}{r^2} \quad \dots\dots(2) \end{aligned}$$

وبمقارنة المعادلة (2) مع الحد الثالث في المعادلة (1) نجد أن:

$$\begin{aligned} E_o \frac{a^3}{r^2} \cos \theta &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{P \cos \theta}{r^2} \\ P &= 4\pi\epsilon_o E_o a^3 \end{aligned}$$

( - )

كرة موصلة نصف قطرها  $a$  وتحمل شحنة كلية مقدارها  $Q$  وضعت داخل مجال كهربائي منتظم  $E_o$ . أوجد الجهد الكهربائي عند كل النقاط خارج الكرة.  
يعطي الجهد الكهربائي  $\varphi$  بحل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية بالمعادلة:

$$\varphi_p(r, \theta) = A_o + \frac{B_o}{r} + \left( A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta + \dots \quad \dots\dots(1)$$

من الشروط الحدودية للمسألة فإن:

$$\varphi_p(a, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} \quad \dots\dots(2)$$

$$\varphi_p(r, \theta)|_{r \rightarrow \infty} = -E_o r \cos \theta \quad \dots\dots(3)$$

لنأخذ  $n=1$  في المعادلة (1)، وبمقارنة المعادلتين (2)، (3) مع (1) نجد أن:

$$A_i = B_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\varphi(r, \theta)|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

$$\varphi(r, \theta)|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} = A_o + \frac{B_o}{a} + \left( A_1 a + \frac{B_1}{a^2} \right) \cos \theta$$

$$\therefore A_o = 0 \quad \dots\dots(4)$$

$$A_1 = -E_o \quad \dots\dots(5)$$

$$B_o = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \quad \dots\dots(6)$$

$$A_1 a + \frac{B_1}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = A_1 a^3$$

$$\therefore B_1 = E_o a^3 \quad \dots\dots(7)$$

وبالتعويض عن قيمة  $B_1, B_o, A_1, A_o$  في المعادلة (1) نحصل على:

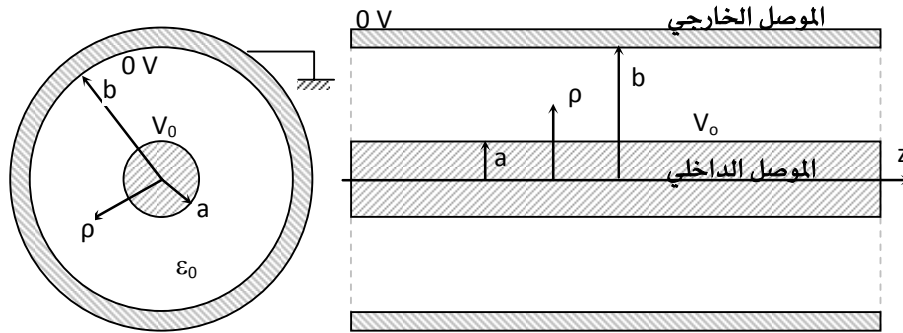
$$\varphi(a, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \left( -E_o r + E_o \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$\therefore \varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} - E_o r \cos \theta \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \quad , \quad r \geq a$$

وهو الجهد عند نقاط تقع خارج الكرة.

:

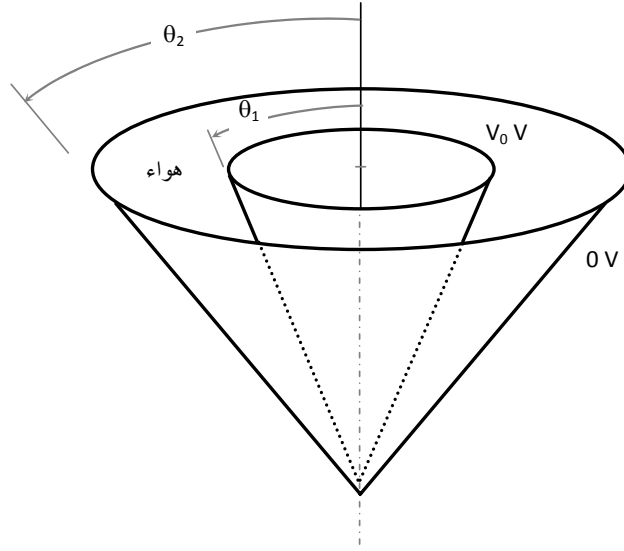
يبين الشكل رقم (١) كابل محوري يتكون من موصل داخلي نصف قطره  $a$  وموصل خارجي نصف قطره  $b$ ، ويفصل بينهما وسط من الهواء خالٍ من الشحنات، فإذا كان جهد الموصل الداخلي  $V_0$  وجهد الموصل الخارجي  $0V$  وكان هذا الكابل يمتد إلى ما لانهاية، فأوجد الجهد الكهربائي  $V(\rho, \phi, z)$  بين الموصلين.



الشكل رقم (١): كابل محوري موصله الداخلي موصل بمصدر فولطيته  $V_0$  والآخرى مؤرض.

:

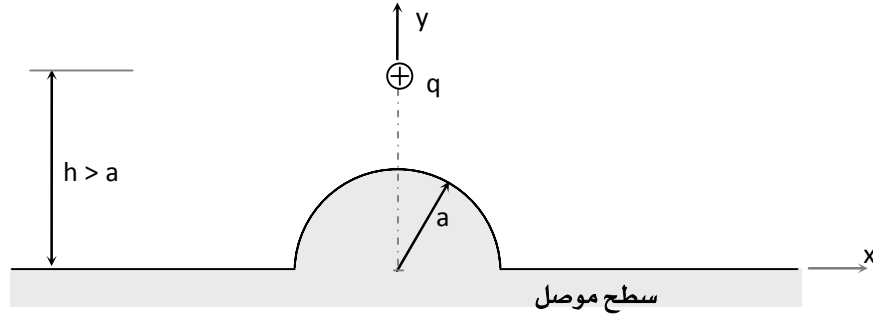
يبين الشكل رقم (٢) غلافين مخروطيين موصلين، فإذا كانت زاوية الداخلي  $\theta_1$  و زاوية الخارجي  $\theta_2$  ( $\theta_2 > \theta_1$ ) وكان جهد الخارجي صفراً والداخلي  $V_0$  فأوجد المجال الكهربائي  $E$  والجهد  $V$  بين هذين الغلافين (افترض أن الغلافين يمتدان إلى ما لانهاية).



الشكل رقم (٢): غلافان مخروطان موصلان غير متصلين جهد أحدهما  $V_0$  والآخر  $0$ .

:

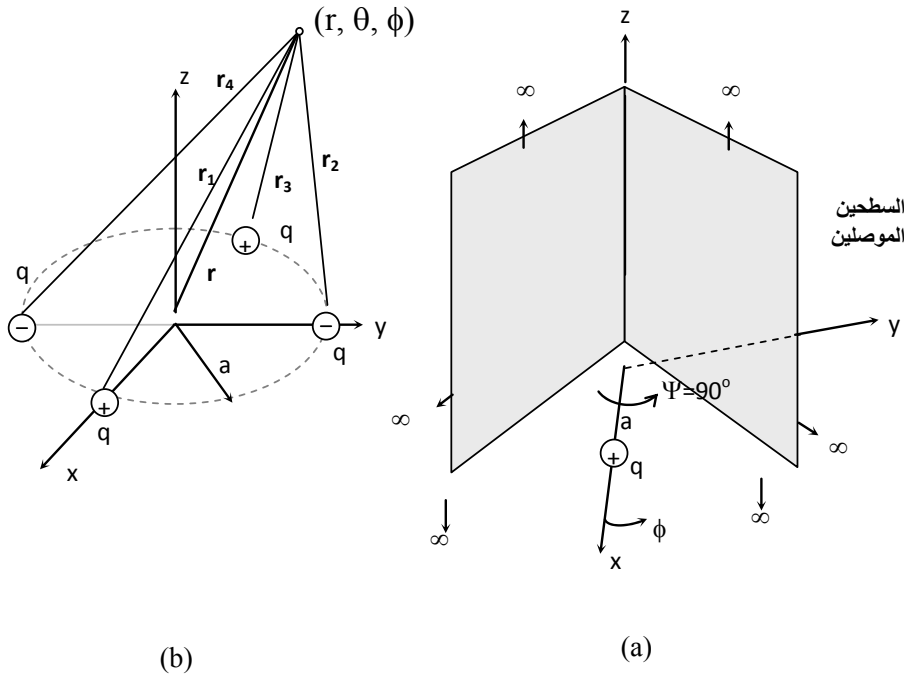
يبين الشكل رقم (٣) شحنة موجبة  $+q$  موضوعة أمام سطح موصل به جزء مستوي وآخر كروي، أوجد المجال الكهربائي  $E$  والجهد الكهربائي في كل مكان في المستوى  $x y$ .



الشكل رقم (٣): شحنة موجبة  $+q$  أمام سطح موصل به جزء مستوي وآخر كروي.

### السؤال الرابع:

يبين الشكل رقم (٤) سطحين موصلين مستويين يعملان مع بعضهما زاوية  $\psi = 90^\circ$  (تسمى هذه الزاوية بزاوية القمة Apex Angle) فإذا كان هناك شحنة موجبة  $+q$  موضوعة في المستوى المنصف للزاوية وعلى بعد  $x = a$  من الخط الممثل لتقاطع السطحين (محور  $z$ )، فأوجد المجال الكهربائي  $E$  في كل مكان (افتراض أن السطحين يمتدان إلى ما لانهاية).



الشكل رقم (٤): العاكس الزاوي لزاوية قمة  $\psi = 90^\circ$  بوجود شحنة موجبة  $q$  على بعد  $a$  من محور  $z$  (a) المسألة الأصلية (b) المسألة المناظرة باستخدام نظرية الصور.





## المجال الكهروستاتيكي في الأوساط العازلة

-

لقد اقتصر نقاشنا في السابق على المسائل الكهروستاتيكية التي لا تتضمن أوساط عازلة، وكان المجال ناتجا عن شحنات حرة فقط (Free charge) تتواجد على سطوح الموصلات، أو على شكل توزيع شحني معين. أما الآن سندرس بعض المسائل الكهروستاتيكية السابقة ولكن بوجود أوساط عازلة.

يعرف العازل المثالي بأنه المادة (أو الفراغ) التي لا تمتلك أية شحنات حرة، أي أنها بعكس الموصلات. أما العازل الحقيقي فيتكون من ذرات أو جزيئات وهذه بدورها تتألف من جسيمات مشحونة (الكترونات وبروتونات)، وقد تتأثر هذه الجسيمات المشحونة بمجال كهربائي خارجي يعمل على إزاحة مركز الشحنة الموجبة عن مركز الشحنة السالبة.

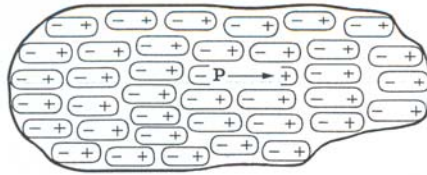
وتقسم العازلات (dielectrics) إلى قسمين:

١- مستقطب (Polarized).

٢- غير مستقطب (Non Polarized).

وتعرف العازلات المستقطبة بأنها مواد من جزيئات مستقطعة يكون فيها مركز الشحنة السالبة لهذه الجزيئات مزاحا قليلا عن مركز الشحنة الموجبة لها. مما يؤدي إلى ظهور عزم ثنائي قطبي (dipole moment) لهذه الجزيئات على الرغم من أن الشحنة المحصلة لهذه الجزيئات تساوي صفرا. وقد تتواجد بعض المواد في حالة استقطاب دائم بغياب أي مجال كهربائي خارجي ويكون الجزيئات هذه المادة عزم ثنائي قطبي دائم أيضا (مثل ذلك الماء، HF،  $\text{NaCl}$ ،  $\text{CH}_3\text{Cl}$ ) وتكون الثنائي قطبيات أحيانا مرتبة بشكل عشوائي كما هو الحال في الماء، فينعدم عزم الثنائي قطبي الكلي للمادة، أما إذا كانت الثنائي قطبيات مرتبة بشكل منتظم وبغياب المجال الكهربائي الخارجي فيتكون هناك عزم ثنائي قطبي كلي للمادة ويطلق على مثل هذه المواد اسم الكترت (electrets) وهي تشبه حالة وجود مغناطيس دائم في مادة معينة.

أما المواد غير المستقطبة فهي مواد ذرات أو جزيئات غير مستقطبة، أو أن مركز الشحنة السالبة للإلكترونات ينطبق على مركز الشحنة الموجبة (النوى - البروتونات) مما يؤدي إلى عدم ظهور أي عزم ثنائي قطبي. ولكن إذا وضعت هذه المواد في مجال كهربائي خارجي، فإن ذراتها أو جزيئاتها تتأثر بهذا المجال مما يؤدي إلى إزاحة مركز الشحنة الموجبة عن مركز الشحنة السالبة باتجاهين متضادين ويظهر نتيجة لذلك ثنائي قطبيات تأثيرية لها عزم تأثيري كما في الشكل رقم (١-٣).



الشكل رقم (١-٣)

(Polarization) -

إذا كانت المادة مستقطبة كما في الشكل رقم (٣-١) فإن عنصر الحجم  $\Delta v$  في تلك المادة يوصف بعزم الشائي قطبي كهربائي والذي يعطى بالعلاقة:

$$\Delta \vec{p} = \int_{\Delta v} \vec{r} dq \quad \dots\dots(3-1)$$

ولما كانت  $\Delta \vec{p}$  تعتمد على حجم العنصر  $\Delta v$  فإنه من الأفضل لنا أن نتعامل مع كمية جديدة تعرف بالاستقطاب  $\vec{P}$ . وتعرف  $\vec{P}$  بأنها عزم الشائي قطبي كهربائي  $\Delta \vec{p}$  لوحدة الحجم  $\Delta v$  أي أن:

$$\vec{P} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta v} \quad \dots\dots(3-2)$$

ويعرف الاستقطاب كذلك بأنه كثافة عزم الشائي قطبي. ومن الواضح من المعادلة السابقة أن الاستقطاب كمية متجهة وينطبق اتجاهها مع اتجاه  $\Delta \vec{p}$  ، وهذا يكون باتجاه إزاحة الشحنة الموجبة عن الشحنة السالبة لتكوين الشائي قطبي.

قد يحتوي عنصر الحجم ( $\Delta v$ ) على عدد من الجزئيات المستقطبة، فإذا احتجنا التحدث أحيانا عن جزئي واحد فإن عزم الشائي قطبي لجزئي واحد  $\vec{p}_m$  تساوي:

$$\vec{p}_m = \int_{\text{جزئي}} \vec{r} dq \quad (3-3)$$

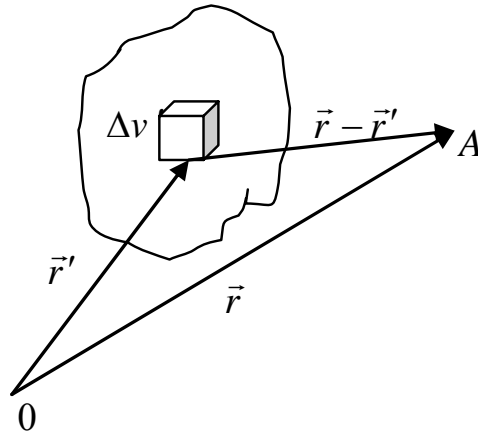
وعلى اعتبار أن الجزئي هو أصغر جزء مكون للمادة العازلة فإن عزم الشائي قطبي للعنصر  $\Delta v$ . يعطى بالعلاقة:

$$\Delta \vec{p} = \sum_m \vec{p}_m \quad (3-4)$$

حيث يجري المجموع  $\sum_m$  على جميع الجزئيات داخل الحجم  $\Delta V$ . أي أن كثافة عزم الثنائي قطبي (الاستقطاب) من المعادلة (3-2) يعطى بالعلاقة:

$$\bar{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_m \bar{p}_m \quad \dots(3-5)$$

يبين الشكل رقم (٢-٣) مادة مستقطبة. ولنفرض أن كل عنصر حجمي  $\Delta V'$  فيها يتسم بمتجه استقطاب  $\bar{P}(\bar{r}')$  عند نقطة على بعد  $\bar{r}'$ .



الشكل رقم (٢-٣)

وينشأ عن هذا العنصر الحجمي المستقطب مجال وجهد كهربائيان عند النقطة  $A$  خارج الوسط المستقطب. وسنقوم الآن بحساب المجال الكهربائي عند النقطة  $A$  ولكن من الأفضل أن نقوم بحساب الجهد أولاً ومن ثم نحسب المجال من الجهد. ويتم ذلك على النحو التالي:

أن الجهد الكهربائي الناشئ عن ثنائي قطبي عزمه  $\bar{p}$  يعطى بالعلاقة:

$$\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{p} \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \quad (3-6)$$

لكننا الآن نتكلم عن عنصر حجمي  $\Delta v'$  من المادة العازلة المستقطبة الذي يحتوي على عدد من الثنائي قطبيات عزمها  $\Delta\bar{p}(\bar{r}')$  وليس ثنائي قطبي واحد عزمه  $\bar{p}(\bar{r})$  أي أن مساهمة  $\Delta v'$  في الجهد خارج المادة العازلة ناتج عن  $\Delta\bar{p}(\bar{r}')$  ، وبالتالي تكتب المعادلة (3-6) على النحو التالي:

$$\Delta\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta\bar{p}(\bar{r}') \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \quad (3-7)$$

وبالتعويض عن  $\Delta\bar{p}$  بدلالة الاستقطاب  $\bar{P}$  في المعادلة (3-7) أي بما يساويه من المعادلة (3-2) فإن المعادلة (3-7) تصبح على النحو التالي:

$$\Delta\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{P}(\bar{r}') \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \Delta v'$$

ومنها فإن:

$$\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v_0} \frac{\bar{P}(\bar{r}') \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} dv' \quad (3-8)$$

معلوم لدينا أن:

$$\bar{\nabla}' \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) = \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \quad (3-9)$$

حيث كتبت  $\bar{\nabla}'$  بدلا من  $\bar{\nabla}$  في المعادلة السابقة؛ لأننا نريد المشتقات بالنسبة للإحداثيات المؤشرة بعلامة (') (ملاحظة  $\bar{\nabla}' = -\bar{\nabla}$ ) فإذا كانت:

$$|\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (3-10)$$

عندها يمكن كتابة المقدار:  $\frac{\bar{P}(\bar{r}') \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$  على النحو التالي:

$$\frac{\bar{P}(\bar{r}') \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \bar{P} \cdot \bar{\nabla}' \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \quad (3-11)$$

وبالاستعانة بالمتطابقة التالية:  $\bar{\nabla}' \cdot (f \bar{F}) = f \bar{\nabla}' \cdot \bar{F} + \bar{F} \cdot \bar{\nabla}' f$  والتي يمكن

كتابة المقدار  $\bar{F} \cdot \bar{\nabla}' f$  منها، على النحو التالي:

$$\bar{F} \cdot \bar{\nabla}' f = \bar{\nabla}' \cdot (f \bar{F}) - f \bar{\nabla}' \cdot \bar{F}$$

فإن الطرف الأيمن للمعادلة (3-11) يكتب على غرار المتطابقة السابقة

على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \bar{P} \cdot \bar{\nabla}' \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} &= \bar{\nabla}' \cdot \left( \frac{\bar{P}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) + \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} (-\bar{\nabla}' \cdot \bar{P}) \\ \therefore \frac{\bar{P} \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} &= \bar{\nabla}' \cdot \left( \frac{\bar{P}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) - \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} (\bar{\nabla}' \cdot \bar{P}) \end{aligned}$$

وبتعويض النتيجة السابقة في المعادلة (3-8)، نجد أن:

$$\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_{v_0} \bar{\nabla}' \cdot \left( \frac{\bar{P}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) dv' + \int_{v_0} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} (-\bar{\nabla}' \cdot \bar{P}) dv' \right] \quad (3-12)$$

وبتحويل التكامل الحجمي للحد الأول فقط في المعادلة (3-12) إلى تكامل

سطحي وذلك باستخدام نظرية التفريق (Divergence Theorem) فإن

المعادلة السابقة تصبح على النحو التالي:

$$\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_{s_0} \frac{\bar{P} \cdot \hat{n}}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} da' + \int_{v_0} \frac{(-\bar{\nabla}' \cdot \bar{P})}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dv' \right] \quad (3-13)$$

نلاحظ من المعادلة (3-13) أن الكميتين  $(\bar{P} \cdot \hat{n})$  و  $(-\bar{\nabla}' \cdot \bar{P})$  غير

متجهتين مستمدتين من المتجه  $\bar{P}$ ، ونظراً لأنهما تمتلكان أبعاد الشحنة

لوحة المساحة ولوحدة الحجم على الترتيب أي أن:  $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$  و  $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$  ، فإن المعادلة السابقة يمكن كتابتها بدلالة  $\rho_p$  و  $\sigma_p$  على النحو التالي:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_0} \frac{\sigma_p da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\rho_p dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3-14)$$

$\rho_p$  عبارة عن مقياس لعدم انتظام الاستقطاب. فإذا كان الاستقطاب في مادة عازلة منتظما ( $\vec{P}$  منتظمة) فإن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$$

بالتالي :-

$$\rho_p = 0$$

وشحنة الاستقطاب المذكورة أعلاه هي شحنة مقيدة وليست حرة. ونعني بكلمة مقيدة: عدم مقدرتنا على انتزاع تلك الشحنة من المادة العازلة. ويمكن كتابة شحنة الاستقطاب الكلية (سطحية + حجمية)

لمادة عازلة على النحو التالي:

$$dq_p = \sigma_p da' + \rho_p dv' \quad (3-15)$$

وبالتعويض عن  $\sigma_p$  بالمقدار  $(\vec{P} \cdot \hat{n})$  وعن  $\rho_p$  بالمقدار  $(-\vec{\nabla} \cdot \vec{P})$  فإن الشحنة الكلية للاستقطاب من المعادلة (3-15) تعطى بالعلاقة:

$$q_p = \iint_{S_0} \vec{P} \cdot \hat{n} da' + \int_V -div \vec{P} dv' \quad (3-16)$$

وتشير المعادلة (3-16) إلى أن مساهمة كل عنصر حجمي  $\Delta v'$  في الشكل رقم (٣-٢) في تكوين الجهد عند النقطة  $A$ ، ينقسم إلى قسمين أحدهما حجمي، وآخر سطحي. وبالتالي فإن المعادلة السابقة يجب أن تساوي

صفاً، طالما بقي العازل متعادلاً كهربياً (لاحظ أن الحد الأول في المعادلة السابقة يساوي الحد الثاني ومخالفاً له بالإشارة عند تطبيق نظرية التفرق).  
والآن يمكننا العودة إلى المعادلة (3-14) حيث يمكننا كتابتها بطريقة توضح بأن الجهد عند النقطة  $A$  ناتج عن توزيع شحني  $q_p$  على النحو التالي:

$$\phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq_p}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \quad (3-17)$$

وباستخدام العلاقة (3-9) فإن المجال الكهربائي  $\vec{E}(\bar{r})$ ، من الجهد الكهربائي  $\phi(\bar{r})$  (المعادلة (3-14)) يعطى بالعلاقة:

$$\vec{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{s_0} \frac{\sigma_p(\bar{r} - \bar{r}') da'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\rho_p(\bar{r} - \bar{r}') dv'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \quad (3-18)$$

-

نحتاج أحياناً لمعرفة الجهد الكهربائي  $\phi$  والمجال الكهربائي  $\vec{E}$  في نقاط داخل الوسط العازل. فعلى سبيل المثال نريد معرفة المجال الكهربائي في مادة عازلة تفصل صفيحتين متوازيتين مشحونتين.  
يعرف المجال الكهربائي الجاهري (Macroscopic Electric Field) بأنه: القوة لكل وحدة الشحنة المؤثرة في شحنة اختبار مغروسة في العازل عندما تكون هذه الشحنة صغيرة جداً إلى حد لا تؤثر في توزيع الشحنات الأصلي. ولكن لم يكن هناك مشكلة في إيجاد المجال الكهربائي في الفراغ ولكن المسألة هنا تختلف. في كيفية وضع شحنة اختبار دون اقتطاع مادة من العازل. وسنبين كيفية التغلب على هذه المشكلة لإيجاد المجال داخل العازل.



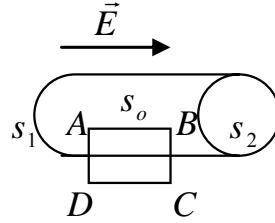
يمتلك المجال الكهروستاتيكي في العازلات نفس خصائص المجال الكهروستاتيكي في الفراغ وبالأخص أنه يكون محافظا (Conservative) أي أن:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

وهذا يكافئ أيضا أن يكون:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$$

لنطبق المعادلة الأخيرة على المسار  $ABCD$  المبين في الشكل رقم (٣-٣)، حيث يقع الجزء  $AB$  داخل فجوة على شكل إبرة (needle - shaped) رفيعة جدا اقتطعت من العازل أما الجزء  $CD$  فيقع داخل المادة العازلة وبإمكاننا إهمال المسارين  $AD$  و  $BC$  لقصرهما.



الشكل رقم (٣-٣)

وهكذا تؤول المعادلة السابقة إلى ما يلي:

$$\vec{E}_v \cdot \vec{L} - \vec{E}_d \cdot \vec{L} = 0$$

أو

$$E_v \vec{L} \cos \theta_v = \vec{E}_d \vec{L} \cos \theta_d$$

$$E_v \cos \theta_v = E_{vt}$$

$$E_d \cos \theta_d = E_{dt}$$

$$E_{dt} = E_{vt} \quad (3-19)$$

حيث  $E_{dt}$  : المجال المماسي في العازل.

$E_{vt}$  : المجال المماسي في الفراغ.

والمعادلة (3-19) تصلح لجميع الاتجاهات التي يمكن أن تأخذها الفجوة الأبرية في العازل. فإذا كان المجال  $\vec{E}$  موازياً لاتجاه الفجوة التي على شكل إبرة، فإن  $E_{dt} = E_d$  ومن المتناظر أيضاً فإن  $E_{vt} = E_v$  ونستنتج مما سبق أن المجال الكهربائي داخل العازل يكون مساوياً للمجال الكهربائي داخل فجوة على شكل إبرة في العازل، شريطة أن يكون محورها موازياً لاتجاه المجال. وبناء على هذا الاستنتاج فإنه لا توجد مشكلة الآن في حساب المجال الكهربائي داخل الفجوة. وتعتبر الفجوة الآن خارج توزيع الشحنات. أي أن حساب المجال الكهربائي في نقطة معينة في الفجوة يعد بمثابة حساب المجال الكهربائي خارج منطقة عازل مستقطب. وبالتالي يمكن حساب الجهد الكهربائي ومن ثم نجد المجال الكهربائي من الجهد الكهربائي. أي أن:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_c+S_1+S_2} \frac{\sigma_p(x',y',z')da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0-V_1} \frac{\rho_p(x',y',z')dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$V_1$  حجم العازل المنقطع على شكل إبرة.

$V_0 - V_1$  حجم العازل بعد انقطاع جزء منه مقداره  $V_1$ .

$S_0$ ،  $V_0$  مساحة السطح الخارجي للعازل وحجمه الأصلي على الترتيب..  
 $S_1$ ،  $S_2$ ،  $S_c$  مساحة السطح الأيسر والأيمن والمستدير للفجوة على الترتيب.

ونظراً لانطباق متجه الاستقطاب  $\vec{P}$  على اتجاه  $\vec{E}$  وكون  $\vec{P}$  منتظماً فإن

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = 0 \text{ على السطح المستدير } S_c \text{ للفجوة. كما أن اختيار للفجوة}$$

أن تكون رفيعة جدا إلى درجة يمكننا إهمال مساحة السطحين  $S_2, S_1$  وحجم الفجوة  $V_1$  وبالتالي فإن  $\varphi(\vec{r})$  من المعادلة السابقة تكتب على النحو التالي:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_0} \frac{\sigma_p(x', y', z') da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\rho_p(x', y', z') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3-20)$$

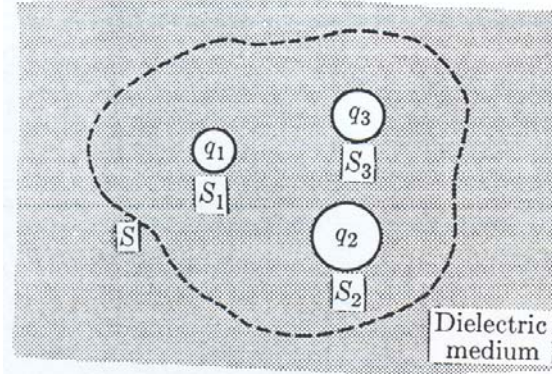
ونلاحظ أن التكاملين في المعادلة (3-20) مستثنى منها مساحة الفجوة وحجمها بعد أن أوجدنا الجهد يمكننا بالطبع حساب المجال الكهربائي  $\vec{E}(\vec{r})$  وذلك بتطبيق المعادلة  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ .

نستنتج مما سبق أنه بالإمكان استخدام علاقات الجهد الكهربائي والمجال الكهربائي التي استخدمت في الحسابات خارج العازل وذلك لحساب المجال الكهربائي والجهد الكهربائي داخل العازل. إلا أن الحسابات السابقة تكون ممكنة وسهلة في حالة كون  $\vec{P}$  دالة في الموضع فقط. أما إذا كانت  $\vec{P}$  دالة في المجال الكهربائي  $\vec{E}$ ، أي أن الاستقطاب ينشأ نتيجة لتأثير المجال الكهربائي ففي هذه الحالة تكون الحسابات معقدة ويجب معرفة  $\vec{P}(\vec{E})$  وفي مثل هذه الحالات تكون العلاقة بين  $\vec{E}$ ،  $\vec{P}$  معلومة تجريبيا.

- :

مر معنا نص قانون غاوس التالي: "إن التدفق الكهربائي خلال سطح مغلق يساوي الشحنة الكلية داخل ذلك السطح مقسوما على  $\epsilon_0$ ". ولم نلاحظ أي ذكر لنوع الشحنة هل هي مقيدة أو حرة، وبالْحَقِيقَةُ أَنَّهُ كَانَ المقصود منها الشحنة الكلية المقيدة منها والحرّة.

لنفرض وسطا عازلا يحتوي على عدد من الموصلات  
 (  $S_4, S_3, S_2, S_1$  ) كما في الشكل رقم (٤-٣) وبالطبع ينشأ مجال  
 كهربائي عن الشحنة الحرة على هذه الموصلات في أية نقطة من نقاط  
 العازل. وبسبب ذلك سيكون العازل مستقطبا.



الشكل رقم (٤-٣)

أي أن المجال الكهروستاتيكي في أية نقطة داخل العازل سيكون  
 ناشئاً عن الشحنة الحرة على الموصلات وشحنة الاستقطاب.

بتطبيق قانون غاوس على السطح المغلق  $S$  المبين في الشكل رقم

(٤-٣) فإننا نحصل على:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da' = \frac{1}{\epsilon_0} [Q_f + Q_p] \quad (3-21)$$

حيث: الشحنات الحرة على الموصلات  $Q_f = q_1 + q_2 + q_3$  داخل السطح  
 الغاوسي  $S$ .

$$Q_p = \int_V (-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dv + \int_{S_1+S_2+S_3} \vec{P} \cdot \hat{n} da = \text{الشحنات المستقطبة}$$

داخل سطح جاوس  $S$ . وتمثل  $V$  حجم الجزء من العازل المحاط بالسطح

المغلق  $S$ . وعند تحويل التكامل الحجمي الأول في المعادلة السابقة إلى تكامل سطحي باستخدام نظرية التفريق نجد أن:

$$Q_p = - \int_{S_1+S_2+S_3} \vec{P} \cdot \hat{n} da + \int_{S_1+S_2+S_3} \vec{P} \cdot \hat{n} da = - \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} da$$

وبالتعويض عن  $Q_p$  من المعادلة السابقة في المعادلة (3-21) نجد أن:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{Q_f}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \left( - \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} da \right)$$

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \hat{n} da = Q_f \quad (3-22)$$

وتشير المعادلة (3-22) إلى أن تدفق المتجه  $(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$  خلال السطح المغلق  $S$  يساوي الشحنة الكلية الحرة التي يحتويها ذلك السطح. ونظراً لأهمية هذا المتجه فإن له تسمية خاصة به يرمز لها بالرمز  $\vec{D}$  ويعرف بالإزاحة الكهربائية أي أن:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3-23)$$

ويلاحظ من المعادلة (3-23) أن اتجاه  $\vec{D}$  هو باتجاه محصلة  $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  ووحداته مثل وحدات الاستقطاب  $\vec{P}$  أي  $C/m^2$ .

وبالتعويض عن  $\vec{D}$  من المعادلة (3-23) في المعادلة (3-22) فإن المعادلة (3-22) تصبح على النحو التالي:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q_f \quad (3-24)$$

ويطلق على المعادلة (3-24) اسم قانون جاوس للإزاحة الكهربائية.

( - )

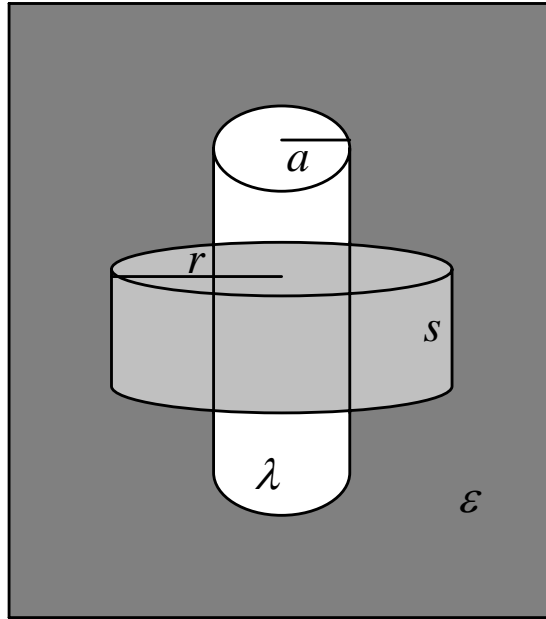
موصل أسطوانى طويل نصف قطره  $a$  ويحمل شحنة خطية قيمتها  $\lambda$  ، غمر في وسط عازل. جد متجه الإزاحة  $\vec{D}$  على بعد  $r$  من المحور خارج الموصل.

الحل:

بتطبيق قانون جاوس للإزاحة الكهربائية نجد أن:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q$$

حيث  $Q$  الشحنة الحرة فقط داخل السطح المغلق  $S$  والذي قمنا بإنشائه على شكل أسطوانة متمحورة مع الأسطوانة الموصلة وتمر في النقطة المراد إيجاد  $\vec{D}$  فيها كما في الشكل رقم (٥-٣).



الشكل رقم (٥-٣)

$$D_r \cdot 2\pi rL = Q = \lambda L$$

$$D_r = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{r}, \quad r > a$$

يمكن تطبيق المعادلة (3-24) على منطقة في الفضاء محدودة بسطح مغلق  $S$ . فإذا كانت كثافة الشحنات الحجمية الحرة التي يحتويها ذلك

السطح المغلق مساويه  $\rho$ ، فإن المعادلة (3-24) تصبح على النحو التالي:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = \rho \Delta V$$

وبقسمة طرفي المعادلة السابقة على  $\Delta V$  وتحويل التكامل السطحي فيها إلى تكامل حجمي فإننا نجد أن:

$$\begin{aligned} \int div \vec{D} dv \\ \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int div \vec{D} dv}{\Delta V} = div \vec{D} = \rho \\ div \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (3-25) \end{aligned}$$

وتدعى المعادلة (3-25) بالصيغة التفاضلية لقانون جاوس وهي الصيغة العامة، ويمكن استخدامها في حالة وجود العازل أو الفراغ. وعند تطبيقها على الفراغ مثلا فإن الاستقطاب فيه يساوي صفرا (أي  $\vec{P} = 0$ ) وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

يمكننا التعبير الآن عن المجال الكهربائي ( $\vec{E}$ ) في أية نقطة في العازل من المعادلة (3-23) بمجموع حدين على النحو التالي:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{D}(\vec{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}(\vec{r}) \quad (3-26)$$

حيث إن الحد الأول  $\left(\frac{\vec{D}}{\epsilon_0}\right)$  يتعلق بكثافة الشحنات الحجمية الحرة داخل سطح مغلق. والحد الثاني  $\left(\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}\right)$  يعتمد على استقطاب الوسط، وكما أن هناك خصائص لخطوط المجال ( $\vec{E}$ ) فإن هناك خصائص لخطوط الإزاحة ( $\vec{D}$ ) ومنها:

- ١- خطوط الإزاحة لا تتقاطع مثلها مثل خطوط المجال.
- ٢- أنها خطوط متصلة.
- ٣- إذا تلاشى المجال الكهربائي (في الموصلات) فإنها تتلاشى أيضا.
- ٤- عدد خطوط الإزاحة تساوي مقدار الشحنة الحرة ( $Q_f$ ) ويساوي التدفق للمتجه ( $\vec{D}$ ).
- ٥- خطوط الإزاحة الممثلة للمتجه ( $\vec{D}$ ) تبدأ أو تنتهي بالشحنات الحرة فقط.

-

يحدث للعازل استقطاب نتيجة لاستجابته للمجال الكهربائي الخارجي. ولا تعتمد درجة الاستقطاب على المجال الكهربائي فحسب بل على خصائص جزيئات العازل أيضا. ويطلق على العلاقة بين  $\vec{E}$  و  $\vec{D}$  (أو  $\vec{P}$ ) بالعلاقة التكوينية (Constitutive Relation). ويمكن



تحديد هذه العلاقة تجريبيا، حيث وجد أن  $\vec{P}$  يتلاشى في معظم المواد العازلة عندما يتلاشى  $\vec{E}$ ، وهذا يعني أن تلك المواد لا تمتلك استقطابا دائما (الاستقطاب الدائم هو وجود قيمة لـ  $\vec{P}$  بغياب  $\vec{E}$ )، ويمكن كتابة العلاقة على النحو التالي:

$$\vec{P} = \chi(E)\vec{E} \quad (3-27)$$

حيث يطلق على المقدار  $\chi(E)$  بالتأثيرية الكهربائية أو بقابلية التكهرب للمادة العازلة. والعازلات إما أن تكون خطية حيث  $\chi(E)$  لا تعتمد على  $\vec{E}$  ومتجانسة حيث  $\chi(E)$  لا تعتمد على الموضع وسوية الخواص في جميع الاتجاهات حيث  $\chi(E)$  لا تعتمد على اتجاه  $\vec{E}$  في العازل كما هو الحال في السوائل والغازات أو أن تكون العازلات غير ذلك (غير خطية وغير متجانسة ومتباينة الخواص).

وبالتعويض عن  $\vec{P}$  من المعادلة (3-27) في المعادلة (3-23) نحصل

على:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \chi(E) \vec{E} \\ &= (\epsilon_0 + \chi(E)) \vec{E} \\ \therefore \vec{D} &= \epsilon(E) \vec{E} \quad (3-28) \end{aligned}$$

حيث:  $\epsilon(E) = \epsilon_0 + \chi(E)$  (سماحية المادة العازلة)

ونلاحظ من المعادلتين ((3-27)، (3-28)) أن السلوك الكهربائي (أي تأثير  $\vec{E}$ ) للمادة يحدد كليا بكميتين إما بالسماحية  $\epsilon$  أو بقابلية التكهرب  $\chi$ . ويفضل عادة التعامل مع كمية واحدة لتحديد سلوك المواد العازلة ويطلق على هذه الكمية بثابت العزل ويرمز لها بالرمز  $K$  ويعرف بالمعادلة التالية:

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 + \chi}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}$$

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (3-29a)$$

$$K = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} \quad (3-29b)$$

وحيث إن  $\epsilon < \epsilon_0$  دائما، فإن قيمة  $K$  أكبر من 1 دائما، وتساوي 1 في حالة الفراغ فقط. وإذا كان المجال المسلط شديدا لدرجة يمكنه سحب الإلكترونات المقيدة من الجزيئات، عندئذ تتحول المادة العازلة إلى موصلة ويطلق على ذلك المجال: شدة العزل. ويبين الجدول التالي ثوابت العزل وشدة العزل لعدد من المواد المعروفة.

شدة العزل $\left(\frac{\text{Volt}}{m}\right)$	$K$	المادة
$9 \times 10^6$	$5 \rightarrow 10$	الزجاج
$5 \rightarrow 20 \times 10^6$	6	الميكال
- - -	80	الماء المقطر
- - -	$25 \rightarrow 8$	الخشب
$3 \times 10^6$	1.00059	الهواء (ضغط جوي)

( - )

أوجد المجال الكهربائي على بعد  $r$  من محور الموصل في المثال

(٣-١).

**الحل:**

بما أن  $\vec{D}$  على بعد  $r$  من المحور تعطى بالعلاقة:

$$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{r}$$

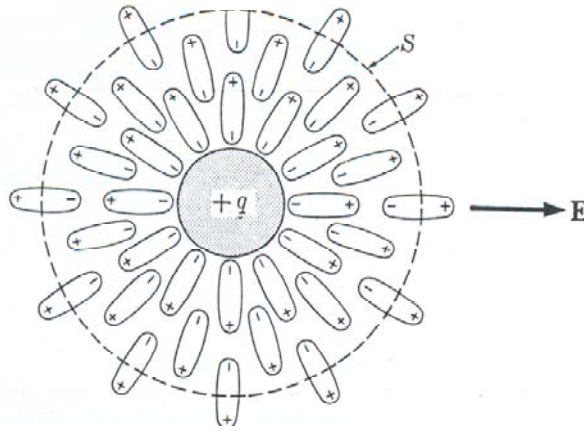
$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \hat{r}$$

( ) -

تعد مسألة وضع شحنة نقطية في مائع عازل، كما في الشكل رقم (٦-٣)، من أبسط الأمثلة التي تتضمن عازلات. فإذا افترضنا شحنة نقطية  $+q$  موضوعة في الفراغ فإن مجالها الكهربائي يكون باتجاه أنصاف الأقطار مبتعدا عن الشحنة  $+q$ ، ولا نتوقع تغييرا في اتجاه هذا المجال عند وضع مادة عازلة حول الشحنة، وذلك لأن  $\vec{E}$ ،  $\vec{P}$  و  $\vec{D}$  توازي إحداهما الأخرى. أي أن جميع الكميات السابقة تقع على امتداد نصف القطر ولا تعتمد إلا على البعد عن الشحنة  $+q$ .

S



الشكل رقم (٦-٣)

وبتطبيق قانون جاوس على السطح  $S$  كما في الشكل رقم (3-6) نجد أن:

$$\begin{aligned}\iint \vec{D} \cdot \hat{n} da &= Q_f \\ D(4\pi r^2) &= q \\ D &= \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \\ \vec{D} &= \frac{1}{4\pi} q \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (3-30)\end{aligned}$$

وبتطبيق المعادلة (3-28) نجد أن المجال الكهربائي  $\vec{E}$  يعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}}{k \epsilon_0} = \frac{1}{4\pi K \epsilon_0} q \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 K} q \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (3-31)\end{aligned}$$

ونلاحظ من المعادلة (3-31) أن المجال الكهربائي لشحنة نقطية ينخفض بنسبة  $\frac{1}{K}$  أي ينخفض إلى قيمة  $\frac{E_0}{K}$  عند وضع مادة عازلة حول الشحنة النقطية. وهذه الحالة عامة، حيث ينخفض المجال دائماً بوضع مادة عازلة بدلا من الفراغ كعازل حول الشحنات.

أما الاستقطاب  $\vec{P}$  فيمكن حسابه بعد وضع المادة العازلة حول الشحنة النقطية من المعادلة (3-27) على النحو التالي:

$$\vec{P} = \chi \vec{E}$$

$$\chi = \varepsilon - \varepsilon_0$$

$$= \varepsilon_0 K - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 (K - 1)$$

$$\therefore \vec{P} = \varepsilon_0 (K - 1) \vec{E} = \varepsilon_0 (K - 1) \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 k} q \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\therefore \vec{P} = \frac{(K - 1)}{4\pi K} q \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (3-32)$$

لاحظ أن الاستقطاب  $\vec{P}$  يساوي صفرًا إذا كانت  $K = 1$  (في حالة الفراغ) وهذا متوقع.

ونريد الآن إيجاد تأثير العازل على الشحنة النقطية  $q$ .

إن الشحنة التي تظهر وكأنها نقطية بالنظرة الجاهرية هي  $Q$

وتساوي:

$$Q = (q) \text{ الشحنة النقطية} + (q_p) \text{ الشحنة المقيدة} \dots\dots(3-33)$$

ولكن الشحنة المقيدة ( $q_p$ ) في العازل تعطي بالعلاقة:

$$q_p = \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} da + \int_v (-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dv$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 \quad , \quad r \neq 0$$

كما أن الشحنة النقطية تعد وفق المفهوم الجاهري (macroscopic) عبارة عن نقطة ولكن ستفرض أنها كبيرة حسب المقياس الجزئي. أي بإمكاننا تعيين نصف قطرها مثل  $b$ ، ثم نجعل نصف القطر هذا يقترب من الصفر.

$$q_p = \lim_{b \rightarrow 0} 4\pi b^2 \left( \vec{P} \cdot \hat{n} \right)_{r=b} = -\frac{(K - 1)q}{K}$$

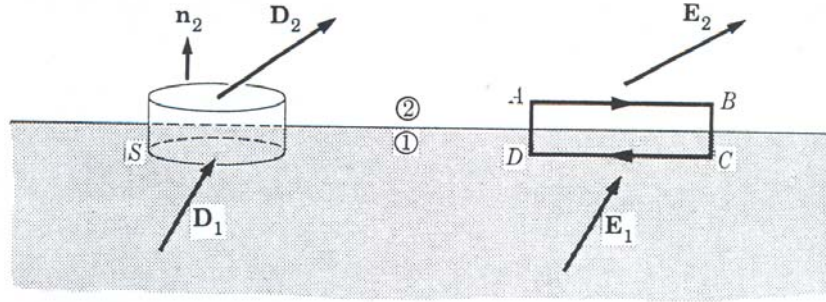
$$E_d = \frac{1}{\varepsilon_0 K} \frac{Q}{4\pi r^2}$$

ومنها فإن:

$$\vec{E}_d = \frac{1}{\epsilon_0 4\pi K} \frac{Q}{r^3} \vec{r}, \quad R_1 < r < R_2$$

قبل الخوض في مسائل أكثر تعقيدا علينا أن نتعرف ما يطرأ على متجهي: المجال  $\vec{E}$ ، والإزاحة  $\vec{D}$  عند انتقالهما من وسط لآخر، كانتقالهما من عازل لعازل مثلا، أو من موصل لعازل وبالعكس. كما يمكن اعتبار الفراغ على أنه عازل ذو سماحية تساوي  $\epsilon_0$ . وهكذا نكون قد استنتجنا شروطا حدودية يستفاد منها في حل المسائل الكهروستاتيكية.

لنأخذ وسطين متماسين 1، 2 كما في الشكل رقم (٣-٧). ولنفرض أن السطح الفاصل بينهما يحمل شحنة خارجية (طليقة) ذات كثافة سطحية مقدارها  $\sigma$  تختلف من نقطة لأخرى على السطح.



الشكل رقم (٣-٧)

لنأخذ سطحاً أسطوانياً بحيث يقطع السطح الفاصل بين الوسطين ويحتضن مساحة قدرها  $\Delta S$  من الفاصل. ولنفرض أن ارتفاع الأسطوانة صغير بحيث يمكن إهماله بالمقارنة مع قطر الأسطوانة.

أن مقدار الشحنة داخل الأسطوانة يساوي:

$$\begin{aligned} \text{مقدار الشحنة} &= \sigma \Delta S + \rho_1 \times \frac{1}{2} \times (\text{حجم الأسطوانة}) \\ &+ \rho_2 \times \frac{1}{2} \times (\text{حجم الأسطوانة}) \\ &= \sigma \Delta S + \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) \times \text{حجم الأسطوانة} \end{aligned}$$

ونظراً لأن حجم الأسطوانة صغير جداً (طولها مهملة) فإن الحد الأخير في العلاقة السابقة يمكن إهماله وبالتالي فإن:

$$\text{مقدار الشحنة داخل الاسطوانة} = \sigma \Delta S$$

وبتطبيق قانون جاوس على السطح الأسطواني  $S$ ، نجد أن:

$$\oiint \vec{D} \cdot \hat{n} \, da = Q_f$$

$$\vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 \Delta S + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 \Delta S = \sigma \Delta S$$

ولكن  $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$  (انظر الشكل (٧-٣))

$$-\vec{D}_1 \cdot \hat{n}_2 \Delta S + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 \Delta S = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_2 \Delta S = \sigma \Delta S$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_2 = \sigma$$

$$D_2 \cos \theta_2 - D_1 \cos \theta_1 = \sigma$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (3-34)$$

حيث إن:

$\theta_1$  الزاوية بين متجه الإزاحة  $\vec{D}_1$  والعمودي على السطح  $\hat{n}_1$ .

$\theta_2$  الزاوية بين متجه الإزاحة  $\vec{D}_2$  والعمودي على السطح  $\hat{n}_2$ .

$D_{1n}$  المركبة العمودية للإزاحة في الوسط الأول.

$D_{2n}$  المركبة العمودية للإزاحة في الوسط الثاني.

ونسنتج من المعادلة (3-34) أن الانقطاع في المركبة العمودية للإزاحة  $\vec{D}$  (الانقطاع يعني  $D_{1n} \neq D_{2n}$ ) يعتمد على كثافة الشحنة السطحية الطليقة (الخارجية) الموضوعة بين السطحين. فإذا لم يكن هناك شحنة طليقة بين السطحين، فإن المركبة العمودية للإزاحة  $\vec{D}$  تكون متصلة (غير منقطعة) عبر السطح الفاصل. وتعد المعادلة (3-34) أول شرط حدي.

بما أن:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

فإن التكامل الخطي للمقدار  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$  حول مسار مغلق يجب أن يساوي صفراً. وبتطبيق هذا الاستنتاج على المسار المغلق  $ABCD$  في الشكل رقم (3-7) على فرض أن  $AB = CD = \Delta l$  و  $AD = BC = 0$  (مهمل الطول)، نجد أن:

$$\vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{l} + \vec{E}_1 \cdot (-\Delta \vec{l}) = 0$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \Delta \vec{l} = 0$$

ومنها فإن:

$$E_2 \Delta l \cos \theta_2 - E_1 \Delta l \cos \theta_1 = 0$$

أي أن:

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \quad (3-35)$$

$\vec{E}_{1t}$ : المركبة المماسية للمجال الأول.

$\vec{E}_{2t}$ : المركبة المماسية للمجال الثاني.

والمعادلة (3-35) تعني أن المركبة المماسية للمجال الكهربائي

متصلة عبر السطح الفاصل. وتعد المعادلة (3-35) ثاني شرط حدي.



وتمثل المعادلتان (3-34) و (3-35) حالات عامة لأي وسطين بدون تحديد، ولكن هناك حالة خاصة هو عندما يكون أحد الوسطين موصلا، كأن يكون الوسط رقم (1) مثلا. في هذه الحالة ينعدم المجال في الموصل ( $\vec{E}_1 = 0$ ) وينعدم كذلك الاستقطاب في ذلك الوسط ( $\vec{P}_1 = 0$ ) ويترتب على ذلك أن ينعدم متجه الإزاحة أيضا ( $\vec{D}_1 = 0$ ) وبهذا تصبح المعادلتان على النحو التالي:

$$D_{2n} = \sigma \quad (3-36)$$

$$E_{2t} = 0 \quad (3-37)$$

والمعادلتين (3-36) و (3-37) تعبران عن الإزاحة والمجال الكهربائي قريبا من السطح الفاصل بين الموصل والعازل.

ويعطي فرق الجهد الكهربائي  $\Delta\varphi$  بين نقطتين متجاورتين

بالعلاقة:

$$\Delta\varphi = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{L}$$

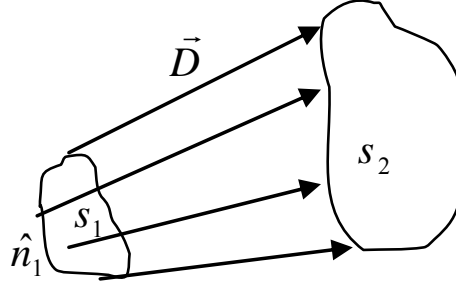
حيث ترمز  $\Delta\vec{L}$  إلى الإزاحة الفاصلة بين نقطتين. وبما أنه لا يوجد أي سبب لأن تكون  $\vec{E}$  لا نهائية عند السطح الفاصل. فإن:

$$\Delta\vec{L} = 0 \quad \text{عندما} \quad \Delta\varphi = 0$$

أي أن الجهد الكهربائي يكون متصلا عند السطح الفاصل. وهذا الاستنتاج يعد ثالث شرط حدي.

وأخيرا فهناك خاصية هامة لمتجه الإزاحة  $\vec{D}$ . وهي أن تدفق الإزاحة الكهربائية  $\Phi_D$  يكون متصلا دائما في المناطق التي لا يوجد بها شحنات حرة (خارجية) ويمكن إثبات ذلك من قانون جاوس على النحو التالي:

لنرسم خطوط الإزاحة بشكل يعبر عن اتجاه  $\vec{D}$  في كل نقطة في منطقة ما ، كما في الشكل رقم (٨-٣) ولنتخيل حجما محددًا لا تقطعه الخطوط من الجوانب ولكن تقطعه فقط من السطحين  $S_1, S_2$ .



الشكل رقم (٨-٣)

وبتطبيق قانون جاوس نجد أن:

$$\Phi_D = \iiint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q_f$$

$$\int_{S_1} \vec{D} \cdot \hat{n}_1 da + \int_{S_2} \vec{D} \cdot \hat{n}_2 da = Q_f$$

وحسب الشكل رقم (٨-٣) فإن:

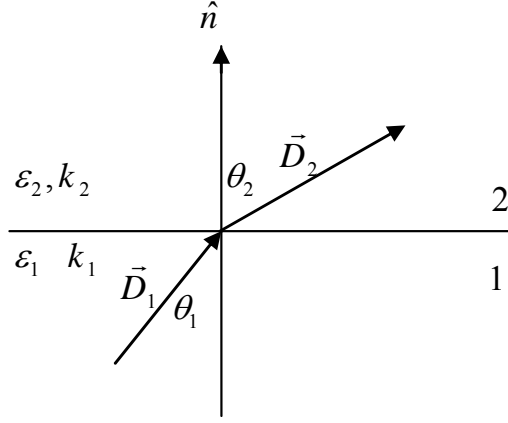
$$\hat{n}_1 = -\hat{n}'_1$$

$$-\int_{S_1} \vec{D} \cdot \hat{n}'_1 da + \int_{S_2} \vec{D} \cdot \hat{n}_2 da = Q_f$$

وتشير العلاقة السابقة إلى أنه لو لم يكن هناك وجود للشحنات الحرة (الخارجية) في المنطقة المحصورة في الحجم المبين في الشكل رقم (٨-٣)، لأصبحت  $Q_f = 0$  وبالتالي يكون التدفق  $\Phi_D$  (عدد الخطوط) الذي يدخل السطح  $S_1$  يساوي التدفق (عدد الخطوط) الخارج من السطح  $S_2$ .

( - )

وسطوان عازلان يفصلهما سطح مستو لا يحتوي على شحنات حرة. فإذا علم أن ثابت العزل للوسط الأول  $K_1$  والثاني  $K_2$  كما في الشكل رقم (٩-٣). أوجد علاقة بين الزاويتين  $\theta_1$  ،  $\theta_2$ .



الشكل رقم (٩-٣)

**الحل:**

نطبق الشرط الحدي الخاص بالإزاحة، وهو:

$$\vec{D} \cdot \hat{n} = \text{ثابت} \quad (\text{متصل})$$

ومنها فإن:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (1)$$

نطبق الشرط الحدي الثاني الخاص بالمجال الكهربائي، وهو

$$\vec{E} \times \hat{n} = \text{cons.} \quad (\text{متصل})$$

ومنها فإن:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (2)$$

من المعادلة (1) نجد أن:

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$$

ولكن

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_0 K_1 E_1$$

$$D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \varepsilon_0 K_2 E_2$$

$$\varepsilon_0 K_1 E_1 \cos \theta_1 = \varepsilon_0 K_2 E_2 \cos \theta_2$$

ومنها فإن:

$$K_1 E_1 \cos \theta_1 = K_2 E_2 \cos \theta_2 \quad (3)$$

ومن المعادلة (2) نجد أن:

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \quad (4)$$

وبقسمة المعادلة (4) على المعادلة (3) نحصل على:

$$\frac{E_1 \sin \theta_1}{K_1 E_1 \cos \theta_1} = \frac{E_2 \sin \theta_2}{K_2 E_2 \cos \theta_2}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{K_1}{K_2} \quad (5)$$

-

بيننا سابقا أن الصيغة التفاضلية لقانون جاوس يكتب على النحو

التالي:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (3-38)$$

حيث أن  $\rho$  عبارة عن كثافة الشحنة الحجمية الحرة.

وكما بينا سابقا فإن العازلات إما أن تكون خطية ومتجانسة

وسوية الخواص في جميع الاتجاهات وإما أن تكون عكس ذلك فإذا

كانت من الصنف الأول، فإن:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

وبالتعويض عن  $\vec{D}$  في المعادلة (3-38) نحصل على:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

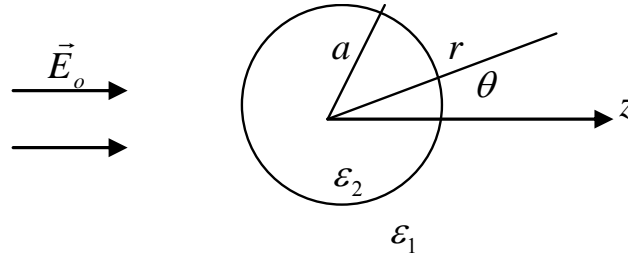
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3-39)$$

وتشير المعادلة (3-39) إلى أن الجهد  $\phi$  في العازل يحقق معادلة بواسون. والفرق الوحيد بين الجهد في العازل والجهد في الفراغ هو إحلال  $\epsilon$  بدلا من  $\epsilon_0$  وفي معظم الحالات التي تهمننا في هذا الموضوع هي الحالات التي لا يحتوي العازل شحنات حرة (خارجية) موزعة خلال الحجم الذي يشغله العازل وبالتالي فإن  $\rho = 0$  والحالة الوحيدة التي تتواجد فيها شحنات حرة هي غمس موصل مشحون أو شحنة نقطية في عازل. وتحت جميع الظروف التي ذكرناها فإن المعادلة (3-39) تؤول إلى معادلة لابلاس التالية:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

بينما كيف أن الكرة الموصلة عند وضعها في مجال كهربائي منتظم  $\vec{E}_0$  غيرت من قيمته واتجاهه حولها، وغيرت كذلك الجهد الكهربائي في النقاط القريبة منها والآن سندرس مسألة شبيهة لها لكننا نريد الآن وضع كرة عازلة غير مشحونة نصف قطرها  $a$  في مجال كهربائي منتظم  $\vec{E}_0$  كما في الشكل رقم (3-10).



الشكل رقم (٣-١٠)

لنفرض أن العازل المصنوع منه الكرة خطي ومتجانس وسوى الاتجاه ويتميز بسماحية مقدارها  $\epsilon_2$  وموضوعه في وسط خارجي سماحيته  $\epsilon_1$  حيث يؤثر فيه مجال كهربائي منتظم  $\vec{E}_0$  باتجاه المحور  $z$ . ولنفرض أن الكرة لا تحتوي على شحنات حرة وموضوعة في نقطة الأصل كما في الشكل رقم (٣-١٠).

يعطي الجهد الكهربائي  $\varphi(r, \theta)$  كما بينا من حل معادلة لابلاس، بالعلاقة التالية:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n P_n(\theta)}{r^{n+1}} \quad (3-40)$$

ولنفرض أن  $\varphi_1(r, \theta)$  تمثل الجهد خارج الكرة العازلة و  $\varphi_2(r, \theta)$  تمثل الجهد داخلها. وسنختار حدودا كافية من المعادلة (3-40) لإيجاد  $\varphi_1$  ،  $\varphi_2$  بما يحقق الشروط الحدودية للمسألة، وسنعمد على المنطق في اختيارنا لتلك الحدود وذلك على النحو التالي:

أولاً: يجب إسقاط الحد الذي يحتوي على  $\frac{1}{r}$  من الجهد  $\varphi_1$ ؛ لأن الكرة

غير مشحونة.

ثانياً: يجب إسقاط الحدود التي تحتوي على  $\frac{1}{r^n}$  من الجهد  $\varphi_2$  لجميع قيم  $n \geq 1$ ؛ لأن وجودها يعني أن الجهد في مركز الكرة لا نهائي وذلك عند تعويضنا عن  $r$  تساوي صفراً وهذا غير منطقي. وهكذا يبقى لدينا من المعادلة (3-40) الحدود التالية لتمثيل الجهد داخل الكرة وخارجها:

$$\varphi_1(r, \theta) = A_0 + A_1 r \cos \theta + \frac{A_2}{r^2} \cos \theta \quad (3-41)$$

$$\varphi_2(r, \theta) = B_0 + B_1 r \cos \theta \quad (3-42)$$

حيث إن  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1$  ثوابت اختيارية لكنها مجهولة ويمكن تحديدها بتطبيق الشروط الحدودية للمسألة [يجب ملاحظة أن تسميات الثوابت في المعادلتين (3-41) و (3-42) تم اختيارها لتسهيل عملية الحساب دون الالتزام بتسميات الثوابت  $A_n$  و  $B_n$  الواردة في المعادلة (3-40)].  
لنبدأ بتطبيق الشروط الحدودية للمسألة لتحديد الثوابت آنفة الذكر.

أولاً: في اللانهاية (أي عندما  $r \rightarrow \infty$ )

يجب أن يساوي الجهد  $\varphi_1$  قيمة تعطى بالعلاقة:

$$\varphi_1 = \varphi_o - E_o r \cos \theta \quad (3-43)$$

$$\varphi_1 = A_0 + A_1 r \cos \theta = \varphi_o - E_o r \cos \theta$$

$$A_0 = \varphi_o, \quad A_1 = -E_o \quad (3-44)$$

ثانياً: على سطح الكرة العازلة (أي عندما  $r = a$ ):

الشرط الحدي الأول: يجب أن يكون الجهد  $\varphi$  عبر السطح

متصلاً. أي أن:

$$\varphi_1(a, \theta) = \varphi_2(a, \theta)$$

وبالتعويض في المعادلتين (3-41) و (3-42) عن  $r$  ، نجد أن العلاقة السابقة سوف تصبح على النحو التالي:

$$A_o + A_1 a \cos \theta + \frac{A_2}{a^2} \cos \theta = B_o + B_1 a \cos \theta$$

وبالتعويض عن  $A_o$  ،  $A_1$  بما يساويها في المعادلة السابقة نجد أن:

$$\varphi_o - E_o a \cos \theta + \frac{A_2}{a^2} \cos \theta = B_o + B_1 a \cos \theta$$

$$\varphi_o + \left( \frac{A_2}{a^3} - E_o \right) a \cos \theta = B_o + B_1 a \cos \theta$$

وبمساواة معاملات طرفي العلاقة السابقة ببعضها ، نجد أن:

$$B_o = \varphi_o \quad , \quad B_1 = \frac{A_2}{a^3} - E_o \quad (3-45)$$

الشرط الحدي الثاني: يجب أن تكون مركبة متجه الإزاحة  $\bar{D}$  العمودية على السطح متصل (نظرا لعدم وجود شحنات حرة على الكرة العازلة)، أي أن:

$$D_{1n} = D_{2n}$$

ومنها فإن:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

حيث إن  $E_{1n}$ ،  $E_{2n}$  مركبة المجال العمودية على السطح في الوسط الأول (الفراغ) والوسط الثاني (العازل) على الترتيب. ومن المعادلة (3-45):

$$\varepsilon_1 \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = \varepsilon_2 \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (3-46)$$

وحتى نستفيد من الشرط الحدي السابق ومن المعادلة (3-46) علينا إيجاد

من المعادلتين (3-41) و (3-42) على الترتيب وذلك على

النحو التالي:



$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = A_1 \cos \theta - \frac{2A_2}{r^3} \cos \theta \Big|_{r=a}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = -E_o \cos \theta - \frac{2A_2}{r^3} \cos \theta \quad \dots(3-47)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=a} = B_1 \cos \theta \quad \dots(3-48)$$

وبالتعويض عن المشتقات السابقة في المعادلة (3-46) نجد أن:

$$-E_o \cos \theta - 2\varepsilon_1 \frac{A_2}{a^3} \cos \theta = \varepsilon_2 B_1 \cos \theta$$

$$B_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left( E_o + \frac{2A_2}{a^3} \right)$$

وبالتعويض عن  $B_1$  من العلاقة السابقة في المعادلة (3-45) نحصل على:

$$A_2 = E_o a^3 \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \right). \quad (3-49)$$

وبالتعويض عن  $A_2$  من المعادلة (3-49) في المعادلة (3-45) نحصل على:

$$B_1 = \frac{-3\varepsilon_1 E_o}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \quad (3-50)$$

وهكذا نكون قد أوجدنا قيم الثوابت في المعادلتين (3-41) و (3-42)

جميعها وتصبح هاتان المعادلتان على النحو التالي:

$$\varphi_1(r, \theta) = \varphi_o - E_o r \cos \theta + E_o a^3 \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \right) \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad r \geq a \quad (3-51)$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \varphi_o - \frac{3\varepsilon_1 E_o}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} r \cos \theta, \quad r \leq a \quad (3-52)$$

والمعادلتان (3-51) و (3-52) عامتان تعطيان الجهد الكهربائي لوسطين

مختلفين فإذا كان أحد الوسطين (الوسط ١ مثلاً) فراغ. أي أن:

$$K_1 = 1 \quad , \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 K_1 = \varepsilon_0$$

$$K_2 = K \quad , \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 K_2 = \varepsilon_0 K$$

وبالتعويض عن  $\varepsilon_1$  ،  $\varepsilon_2$  في المعادلتين (3-51) و (3-52) نحصل على:

$$\varphi_1(r, \theta) = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + E_0 a^3 \left( \frac{K-1}{K+2} \right) \frac{\cos \theta}{r^2} \quad , \quad r \geq a \quad (3-53)$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \varphi_0 - \frac{3E_0}{K+2} r \cos \theta \quad , \quad r \leq a \quad (3-54)$$

وبعد أن تم إيجاد الجهد  $\varphi$  داخل الكرة العازلة وخارجها، يمكننا الآن إيجاد المجال الكهربائي داخل الكرة العازلة أيضا وخارجها وذلك بتطبيق المعادلة:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

$$\vec{E}_1 = -\vec{\nabla} \varphi_1 = - \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \hat{\theta} \right]$$

$$= \left[ E_0 \cos \theta + 2E_0 a^3 \left( \frac{K-1}{K+2} \right) \frac{\cos \theta}{r^3} \right] \hat{r} + \left[ E_0 a^3 \left( \frac{K-1}{K+2} \right) \frac{\sin \theta}{r^3} - E_0 \sin \theta \right] \hat{\theta} \quad (3-55)$$

$$\vec{E}_2 = -\vec{\nabla} \varphi_2 = - \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \hat{\theta} \right]$$

$$= \left( \frac{3E_0}{K+2} \right) \cos \theta \hat{r} - \left( \frac{3E_0}{K+2} \right) \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\vec{E}_2 = \left( \frac{3E_0}{K+2} \right) \hat{z} \quad \dots (3-56)$$

نلاحظ أيضا أن المجال الكهربائي داخل الكرة العازلة ( $\vec{E}_2$ ) منتظم وقيمته  $\left( \frac{3E_0}{K+2} \right)$  ، فلو أصبحت الكرة العازلة فراغا ( $K=1$ ) فإن

$$\vec{E}_2 = E_0 \hat{z} \text{ أي مجال منتظم.}$$

ونظرا لعدم لوجود شحنات حرة على الكرة العازلة فإن خطوط الإزاحة  $\vec{D}$  يجب أن تكون متصلة عند عبورها سطح الكرة، ومعنى ذلك أنه لا يتولد خطوط جديدة أو يتلاشى أي منها. كما يجب ملاحظة أن الخطوط تتجمع في الكرة العازلة لأن  $\vec{D}$  داخلها أكبر من  $\vec{D}$  خارجها. أما بالنسبة لخطوط المجال الكهربائي  $\vec{E}$  فإن - كما بينا من الشروط الحدودية للمجال - المركبة المماسية للمجال على سطح الكرة يجب أن تكون متصلة عبر السطح. ونظرا لأن المجال الكهربائي داخل الكرة أصغر من المجال خارجها فإن عدد خطوط المجال الكهربائي داخل الكرة أقل من عدد الخطوط خارجها.



## المجال المغناطيسي للتيارات الثابتة

تعرفنا على خصائص توزيعات الشحنات الاستاتيكية (الساكنة) وما ينجم عنها من مجال وجهد وطاقة كهروستاتيكية. أما الآن فسنتعرف على أثر جديد للشحنات المتحركة وهو المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  (Magnetic Field) فالشحنات عندما تتحرك بسرعة ثابتة تولد حولها مجالاً مغناطيسياً بالإضافة إلى المجال الكهروستاتيكي الموجود حولها أصلاً وهي ساكنة. كما أن الشحنات إذا تحركت بتسارع فإنها ستشع مجالات كهرومغناطيسية يمكن من خلالها نقل الطاقة. وبالتالي يمكننا تلخيص تأثيرات الشحنات الساكنة ( $v = 0$ ) والشحنات المتحركة ( $v \neq 0$ )

والشحنات المتحركة بتسارع  $\left(\frac{dv}{dt} \neq 0\right)$  على النحو التالي:

$$(شحنات ساكنة) \quad v = 0 \Rightarrow \vec{E} \neq 0, \quad \vec{B} = 0$$

$$(شحنات متحركة بسرعة ثابتة) \quad v \neq 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{E} \neq 0, \quad \vec{B} \neq 0$$

$$(شحنات متحركة بتسارع) \quad v \neq 0, \quad \frac{dv}{dt} \neq 0 \Rightarrow \vec{E} \neq 0, \quad \vec{B} \neq 0$$

وتجدر الإشارة هنا إلى أنه يطلق على المجال الناشئ عن حركة شحنات متحركة بسرعة ثابتة (أو تيار ثابت Steady لا يعتمد على الزمن) أو عن مغناط دائمة بالمجال المغناطيسي الاستاتيكي أو المستقر، بينما يطلق على الصنف الآخر والذي ينشأ عن تيارات متغيرة مع الزمن بالمجالات المغناطيسية المتغيرة زمنياً. أما الصنف الأول من المجالات فهو موضوع دراستنا الحالية.

هناك عدة مجالات في الفيزياء، مثل مجال الجاذبية الأرضية والمجال الكهربائي. فمجال الجاذبية الأرضية  $\vec{g}$  في نقطة ما يعرف بأنه النسبة بين قوة الجذب  $\vec{F}_g$  المؤثرة في كتلة مثل  $m$  موجودة في تلك النقطة، أي أن:

$$\vec{g} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_g}{m} \quad \dots(4-1)$$

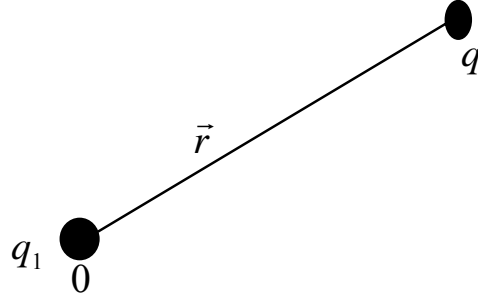
أما المجال الكهربائي  $\vec{E}$  في نقطة ما، فيعرف بأنه بالنسبة بين القوة الكهربائية  $\vec{F}_E$  المؤثرة في شحنة اختبار موجبة  $q_0$  موجودة في تلك النقطة، أي أن:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_E}{q_0} \quad \dots(4-2)$$

ولتعريف المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  في نقطة ما، علينا أن نجد القوة المغناطيسية  $\vec{F}_m$  المؤثرة في شحنة  $q$  متحركة بسرعة  $\vec{v}$ ، وموجودة في تلك اللحظة في النقطة المراد إيجاد المجال فيها. ويتم ذلك على النحو التالي:

بيننا في السابق أن قوة كولوم  $\vec{F}_E$  المؤثرة على شحنة  $q$  واقعة على بعد  $\vec{r}$  من نقطة الأصل المتواجدة فيها شحنة أخرى  $q_1$  كما في الشكل رقم (٤-١) تعطى بالعلاقة:

$$\vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \dots(4-3)$$



الشكل رقم (٤-١)

طبعا القوة السابقة هي القوة الكهربائية (الكهروستاتيكية) الكلية المتبادلة بين الشحنتين  $q_1, q$  في حالة سكونهما، أما إذا تحركت الشحنتان بسرعتين منتظمتين  $\vec{v}_1, \vec{v}$  على الترتيب، فسينتج إضافة للقوة الكهربائية السابقة قوة مغناطيسية. أي أن الشحنة  $q_1$  تؤثر في الشحنة  $q$  بقوة مغناطيسية  $\vec{F}_m$  (طبعا نتجاهل هنا قوة الجذب المادي بين الشحنتين لأن مقدارهما بالنسبة للقوتين الكهربائية والمغناطيسية صغير جداً) تعطى بالعلاقة:

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq_1}{r^2} \vec{v} \times \left( \vec{v}_1 \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad \dots(4-4)$$

وتعرف  $\mu_0$  بثابت نقاذية الفراغ للتأثير المغناطيسي (Permeability) والمقدار  $\frac{\mu_0}{4\pi}$  يساوي  $10^{-7} N \cdot s^2 / C^2$  ويؤدي نفس الدور الذي يؤديه المقدار  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  في الكهروستاتيكية. نعود الآن لتعريف المجال المغناطيسي  $\vec{B}$

حيث يعرف بأنه: المتجه الذي يحقق المعادلة التالية:

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} \quad \dots(4-5)$$

ونلاحظ من المعادلة (4-5) أن شحنة الاختبار  $q$  متحركة بسرعة  $\vec{v}$  في النقطة المراد إيجاد المجال  $\vec{B}$  فيها.

وبمقارنة المعادلتين (4-4) و (4-5) ببعضهما، نجد أن المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  يعطى بالعلاقة:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1}{r^2} \vec{v}_1 \times \frac{\vec{r}}{r} \quad \dots(4-6)$$

أما وحدة المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  فهي طبقاً للمعادلة (4-5) تساوي:

$$\frac{N \cdot s}{C \cdot m} = 1 Tesla \text{ (تسلا)}$$

نستنتج مما سبق أن قوتين تؤثران في الشحنة  $q$ ، وذلك إذا تحركت هذه الشحنة بسرعة  $\vec{v}$ ، إحداهما كهربائية ( $\vec{F}_E$ ) والأخرى مغناطيسية ( $\vec{F}_m$ )، والقوة المحصلة  $\vec{F}$  في هذه الحالة هي قوة كهرومغناطيسية (Electromagnetic force) وتساوي:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \dots(4-7)$$

وتعرف القوة الكهرومغناطيسية ( $\vec{F}$ ) المذكورة في المعادلة (4-7)، أيضاً بقوة لورنر (Lorentz force). وتجد الإشارة هنا إلى أن الفروق الأساسية بين

القوتين  $\vec{F}_m, \vec{F}_E$  هي:



أولاً: تؤثر القوة  $\vec{F}_E$  في الشحنة  $q$  باتجاه يقع على امتداد الخط الواصل بين الشحنتين  $q, q_1$ ، أما اتجاه  $\vec{F}_m$  فهو عمودي دائماً على المستوى المؤلف من  $\vec{V}$  و  $\vec{B}$ ، أي أن  $\vec{F}_m$  عمودية على  $\vec{V}$  وعمودية على  $\vec{B}$  أيضاً حسب قاعدة اليد اليمنى.

ثانياً: بما أن  $\vec{F}_m$  عمودية على  $\vec{V}$  دائماً، وبالتالي عمودية على اتجاه الحركة، فإن القوة  $\vec{F}_m$  لا تبذل أي شغل في حركة الجسيمات المشحونة. فالإلكترون الذي يدور حول النواة في الذرة والقمر الصناعي الذي يدور حول الأرض وأمثالها، لا يبذل أي شغل في دورانهم طالما لا يوجد أية قوة تؤثر باتجاه الحركة. أما في حالة القوة الكهربائية  $\vec{F}_E$  فتبذل شغلاً دائماً في حركة الجسيمات المشحونة.

ثالثاً: القوة المغناطيسية دائماً أقل بكثير من القوة الكهربائية أي أن:

$$\vec{F}_m \ll \vec{F}_E$$

يمكن برهان ذلك على النحو التالي: اضرب البسط والمقام للطرف الأيمن للمعادلة (4-4) بالثابت  $\epsilon_0$  وقارن النتيجة التي تحصل عليها بالمعادلة (4-3)، تجد أن وحدات  $\mu_0 \epsilon_0$  يجب أن تكون معكوس السرعة أي:

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad \dots(4-8)$$

حيث  $c$  ثابت له أبعاد السرعة.

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (4-4) على النحو التالي:

$$\vec{F}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\vec{v}}{c} \times \left( \frac{\vec{v}_1}{c} \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad \dots(4-9)$$

بالتعويض عن  $\epsilon_0, \mu_0$  في المعادلة (4-8) بالقيم المعروفة لهما، نجد أن:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8.854 \times 10^{-12}}} = 2.9979 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

والتي تساوي عدديا سرعة الضوء في الفراغ وسنبين في فصل لاحق أن هذا الثابت لم يأت صدفة ولكنه نتيجة أن الضوء عبارة عن أمواج كهرومغناطيسية.

عند مقارنة النسبة بين  $\vec{F}_m$  ،  $\vec{F}_E$  لشحنتين مثل  $q_1, q$  وذلك بقسمة المعادلة (4-9) على المعادلة (4-3) نجد أن:

$$\frac{\vec{F}_m}{\vec{F}_E} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\vec{v}}{c} \times \left( \frac{\vec{v}_1}{c} \times \frac{\vec{r}}{r} \right)}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}}$$

$$\frac{|\vec{F}_m|}{|\vec{F}_E|} = \frac{v_1 v}{cc}$$

وتشير النتائج العملية إلى أن:

$$\frac{|\vec{F}_m|}{|\vec{F}_E|} \leq \frac{v\vec{v}_1}{c^2}$$

$$\vec{v}_1 \vec{v} \ll c^2 \text{ نظرا لأن } \vec{F}_m \ll \vec{F}_E$$

وتجدر الإشارة هنا إلى أن  $\vec{F}_m$  يمكن إهمالها بالنسبة لـ  $\vec{F}_E$  في بعض الأنظمة ويجب الحذر حيث تصبح  $\vec{F}_m$  ذات قيمة لا يمكن إهمالها بالمقارنة مع  $\vec{F}_E$ .

يمكن إيجاد العلاقة بين المجالين  $\vec{B}, \vec{E}$  الناتجين عن حركة

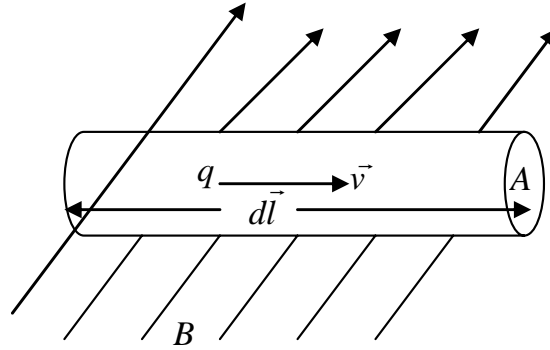
الشحنة  $q_1$  على النحو التالي:

$$\begin{aligned}\vec{F}_m &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\vec{v}}{c} \times \left( \frac{\vec{v}_1}{c} \times \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\vec{v}}{c} \times \left( \frac{\vec{v}_1}{c} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \right) \\ &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ \frac{\vec{v}}{c} \times \left( \frac{\vec{v}_1}{c} \times q\vec{E} \right) &= q\vec{v} \times \vec{B}\end{aligned}$$

ومنها فإن:

$$\begin{aligned}q\vec{v} \times \left( \frac{\vec{v}_1}{c} \times \frac{\vec{E}}{c} \right) &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{B} &= \frac{\vec{v}_1}{c} \times \frac{\vec{E}}{c} \quad \dots\dots(4-10)\end{aligned}$$

نريد الآن حساب القوة المؤثرة في عنصر  $d\vec{l}$  من موصل يحمل تيار  $I$  حيث يقع الموصل في منطقة يؤثر بها مجال مغناطيسي  $\vec{B}$  كما في الشكل رقم (٢-٤) يؤخذ عادة اتجاه عنصر الطول  $d\vec{l}$  أو عنصر التيار  $I d\vec{l}$  باتجاه التيار أي باتجاه حركة الشحنات الموجبة في الموصل وبالتالي فإن  $d\vec{l}$  باتجاه السرعة  $\vec{v}$ . انظر الشكل رقم (٢-٤).



الشكل رقم (٢-٤)

إذا كانت  $N$  تمثل عدد ناقلات الشحنة في وحدة الحجم و  $A$  مساحة مقطع الموصل و  $q$  شحنة كل من ناقلات الشحنة، فإن القوة المؤثرة في عنصر الطول  $d\vec{l}$ ، من المعادلة (4-5) تعطى بالعلاقة:

$$d\vec{F} = NA \left| d\vec{l} \right| q \vec{v} \times \vec{B}$$

ونظراً لأن  $d\vec{l}$  باتجاه  $\vec{v}$ ، فإن بالإمكان كتابة العلاقة السابقة بشكل آخر على النحو التالي:

$$d\vec{F} = Nq A \left| \vec{v} \right| d\vec{l} \times \vec{B}$$

ولكن المقدار  $NqA \left| \vec{v} \right|$  عبارة عن التيار الكهربائي  $I$  في حالة وجود صنف واحد من ناقلات الشحنة. وبالتالي يمكن كتابة المعادلة السابقة على النحو التالي:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \quad \dots(4-11)$$

تمثل المعادلة السابقة القوة ( $d\vec{F}$ ) المؤثرة في عنصر  $d\vec{l}$  يحمل تياراً  $I$  ويقع في مجال  $\vec{B}$ .

أما القوة  $\vec{F}$  المؤثرة في الموصل جميعه فيمكن إيجادها بإجراء التكامل للمعادلة السابقة. أما إذا كان الموصل يشكل مساراً مغلقاً، فإن القوة المؤثرة فيه تساوي:

$$\vec{F} = \oint Id\vec{l} \times \vec{B} \quad \dots(4-12)$$

فإذا كان المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  يعتمد على الموضع في الموصل فإن إمكانية تبسيط المعادلة السابقة هو إخراج  $I$  من التكامل فقط. أي أن:

$$\vec{F} = I \oint_c d\vec{l} \times \vec{B} \quad \dots(4-13)$$

أما إذا كانت  $\vec{B}$  منتظمة ولا تعتمد على الوضع في الموصل، فإن المعادلة (4-12) تؤول إلى:

$$\vec{F} = I \left( \oint_c d\vec{l} \right) \times \vec{B}$$

ولكن المقدار  $\oint_c d\vec{l}$  يساوي صفرا، نظرا لأن مجموع المتجهات التي تشكل مسارا مغلقا يساوي صفرا، وبالتالي فإن المعادلة السابقة تساوي صفرا أي أن:

$$\vec{F} = I \left( \oint_c d\vec{l} \right) \times \vec{B} = 0$$

يمكن إيجاد عزم الازدواج الدوراني على موصل يحمل تيارا على النحو التالي:

يعطي عزم الازدواج الدوراني بالعلاقة:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

أما عزم الازدواج على جزء من الموصل ( $d\vec{l}$ ) يؤثر فيه جزء من القوة  $d\vec{F}$  فيساوي:

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

وبالتعويض عن  $d\vec{F}$  من المعادلة (4-11) في المعادلة السابقة نحصل على:

$$d\vec{\tau} = I \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B})$$

أما عزم الازدواج على مسار مغلق، فيساوي:

$$\vec{\tau} = I \oint_c \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad \dots(4-14)$$

ومرة أخرى، فإنه يتعذر تبسيط المعادلة السابقة أكثر، ما لم تكن  $\vec{B}$  منتظمة، فإذا كانت  $\vec{B}$  منتظمة، لأمكن فك المقدار  $\vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B})$  على

النحو التالي:

$$\vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) = \vec{r} \times \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ dx & dy & dz \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{r} \times \left[ \hat{i} (B_z dy - B_y dz) + \hat{j} (B_x dz - B_z dx) + \hat{k} (B_y dx - B_x dy) \right]$$

$$\vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ B_z dy - B_y dz & B_x dz - B_z dx & B_y dx - B_x dy \end{vmatrix}$$

$$\left[ \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) \right]_x = y (B_y dx - B_x dy) - z (B_x dz - B_z dx) \quad \dots(4-15a)$$

$$\left[ \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) \right]_y = z (B_z dy - B_y dz) - x (B_y dx - B_x dy) \quad \dots(4-15b)$$

$$\left[ \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) \right]_z = x (B_x dz - B_z dx) - y (B_z dy - B_y dz) \quad \dots(4-15c)$$

إذا كانت  $\vec{B}$  منتظمة، فإنها لا تعتمد على  $\vec{r}$  وبالتالي يمكن إخراج مركبات المجال  $B_z, B_y, B_x$  خارج التكاملات التي تظهر في المعادلة (4-14).

وتبقى لدينا التكامل الذي على الشكل  $\int y dx, \int y dy, \int z dz, \dots$

ونلاحظ هذه التكاملات أنها فضائية وأن لها هيتتين عامتين هما:

$$\int \xi d\xi \quad \dots(4-16a)$$

$$\int \xi d\eta \quad \dots(4-16b)$$

حيث  $\xi$  تمثل إحدى الإحداثيات  $(x, y, z)$  لأعلى التعيين و  $\eta$  تمثل إحداثياً آخر غير الإحداثي الأول. أما التكاملات التي على الهيئة الأولى (المعادلة (4-16a)) فإن نتيقتها تساوي صفراً لأن:

$$\oint \xi d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi d\xi + \int_{\xi_2}^{\xi_1} \xi d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi d\xi - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi d\xi = 0$$

أما التكاملات الأخرى التي على الهيئة  $\oint \xi d\eta$  فإنها تتضمن متغيرين هما  $\eta, \xi$  ولا يوجد فرق بين أخذ التكامل حول المنحنى الحقيقي أو حول المسقط الذي على المستوى  $\eta$ :

$$\oint \xi d\eta = \int_a^b \xi_1(\eta) d\eta + \int_b^a \xi_2(\eta) d\eta$$

ونتيجة التكامل السابق يجب أن تعبر عن المساحة المحصورة داخل مسقط المنحنيين وهي كمية موجبة.

فإذا ظهرت  $\eta, \xi$  بترتيب دوري حسب قاعدة اليد اليمنى لنظام الإحداثيات فإن اتجاه الدوران على المنحنى المغلق سيحدد اتجاه العمود المقام وبالتالي يمكن كتابة المعادلة السابقة بالصيغة التالية:

$$\oint \xi d\xi = A_\xi$$

إذ أن الإحداثيات  $\xi, \eta, z$  تمثل تبديلات دورية للإحداثيات  $(x, y, z)$ . وباستخدام النتيجة السابقة يمكننا كتابة التكامل التالي:

$$\tau_x = I \oint_c \left[ \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) \right]_x$$

بصورة أخرى كما يلي:

$$\begin{aligned}
\tau_x &= I \oint y (B_y dx - B_x dy) - z (B_x dz - B_z dx) \\
&= I \left[ B_y \oint y dz - B_x \oint y dy - B_x \oint z dz + B_z \oint z dx \right] \\
&= I \left[ B_y (-A_z) - 0 - 0 + B_z (+A_y) \right] \\
&= I (A_y B_z - A_z B_y)
\end{aligned}$$

أي أن:

$$\tau_x = I [A_y B_z - A_z B_y] \quad \dots(4-17a)$$

كذلك بالمثل فإن:

$$\tau_y = I [A_z B_x - A_x B_z] \quad \dots(4-17b)$$

$$\tau_z = I [A_x B_y - A_y B_x] \quad \dots(4-17b)$$

ويمكن دمج المركبات الثلاث السابقة ( $\tau_z, \tau_y, \tau_x$ ) بتعبير واحد

وبمعادلة واحدة على النحو التالي:

$$\bar{\tau} = I (\bar{A} \times \bar{B}) = I \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad \dots(4-18)$$

حيث  $\bar{A}$  متجه ذو مركبات تمثل المساحات المتكونة من إسقاط المنحنى  $c$  (انظر الشكل رقم ٤-٣) على السطوح  $xy$  و  $yz$  و  $zx$ . وتدعى الكمية  $I \bar{A}$  بالعزم المغناطيسي (magnetic moment) للدائرة الكهربائية،

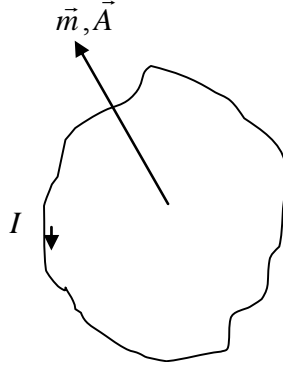
ويرمز لها عادة بالرمز  $\bar{m}$  أي أن:

$$\bar{m} = I \bar{A} \quad \dots(4-19)$$

وتشير المعادلة (4-19) إلى أن اتجاه  $\bar{m}$  هو اتجاه  $\bar{A}$ ، ويحدد عادة اتجاه  $\bar{A}$  حسب قاعدة اليد اليمنى. أي عندما تشير أصابع اليد باتجاه التيار



الكهربائي فإن الإبهام يشير باتجاه المساحة  $\vec{A}$  أو  $\vec{m}$  كما هو موضح في الشكل رقم (٣-٤).



الشكل رقم (٣-٤)

وبنفس الأسلوب السابق يمكننا إيجاد:

$$\frac{1}{2} \oint_c \vec{r} \times d\vec{l} = \vec{A}$$

على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \oint_c \vec{r} \times d\vec{l} &= \oint_c \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \left[ \oint_c y dz - \oint_c z dy \right] + \hat{j} \left[ \oint_c z dx - \oint_c x dz \right] + \hat{k} \left[ \oint_c x dy - \oint_c y dx \right] \\ &= \hat{i} [A_x - (-A_x)] + \hat{j} [A_y - (-A_y)] + \hat{k} [A_z - (-A_z)] \\ \oint_c \vec{r} \times d\vec{l} &= 2 \left( \hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z \right) = 2\vec{A} \\ \frac{1}{2} \oint_c \vec{r} \times d\vec{l} &= \vec{A} \quad \dots(4-20) \end{aligned}$$

ومن المعادلتين (4-19) و (4-20) نجد أن:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint_c \vec{r} \times d\vec{l} \quad \dots(4-21)$$

فإذا كان التيار ( $I$ ) يسير خلال وسط موصل وغير محصور في أسلاك كهربائية فإن المقدار  $I d\vec{l}$  (عنصر التيار) يعطى بالعلاقة:

$$I d\vec{l} = ne |\vec{v}| A d\vec{l}$$

بما أن اتجاه  $\vec{v}$  هو نفسه اتجاه  $d\vec{l}$  فإن المعادلة السابقة تكتب على النحو التالي:

$$I d\vec{l} = ne |\vec{A}| |d\vec{l}| \vec{v} = ne dv \vec{v}$$

$$I d\vec{l} = ne \vec{v} dv = \vec{J} dv \quad \dots(4-22)$$

حيث  $\vec{v}$  هي السرعة و  $dv$  عنصر الحجم ( $A dl$ )

وبالتعويض عن  $I d\vec{l}$  من المعادلة (4-22) في المعادلة (4-21) نحصل

على:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_c \vec{r} \times \vec{J} dv \quad \dots(4-23)$$

أو

$$d\vec{m} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{J} dv \quad \dots(4-24)$$

وعلاقات العزم المغناطيسي السابقة مفيدة جدا في فهم وشرح الخصائص المغناطيسية للمواد.

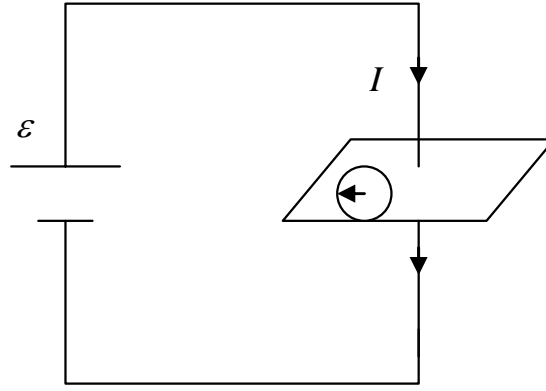
يمكن بالتعويض عن  $I \vec{A}$  من المعادلة (4-19) في المعادلة (4-18)

كتابة  $\vec{\tau}$  على النحو التالي:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \dots(4-25)$$

والمعادلة (4-25) شبيهة تمام بمعادلة عزم الازدواج  $\bar{c}$  لثناقلي كهربائي  $\bar{P}$  في مجال كهربائي منتظم وهي  $\bar{c} = \bar{P} \times \bar{E}$ .

أعلن أورستد عام 1820 اكتشافا وهو أن التيارات الكهربائية تولد مجالات مغناطيسية حولها ويبين الشكل رقم (٤-٤) التجربة التي تثبت توليد المجال المغناطيسي حول سلك موصل عند مرور تيار كهربائي فيه، حيث يؤثر هذا المجال في بوصلة موضوعة حوله، أو في برادة حديد على ورقة في المستوى المبين.



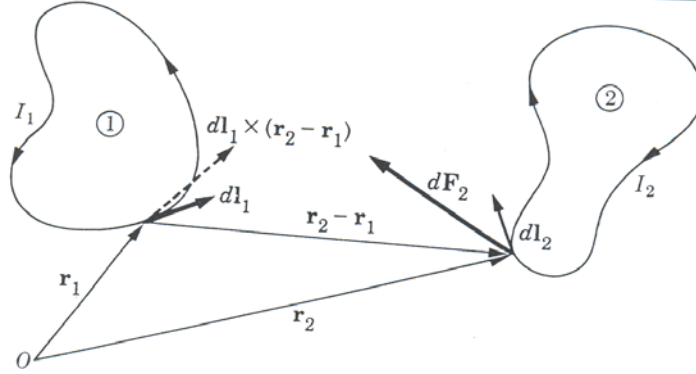
الشكل رقم (٤-٤)

وخلال أسابيع من إعلان الاكتشاف السابق استطاع أمبير، أن يصيغ نتائج سلسلة من التجارب العملية في معادلات رياضية، أمكن صياغتها بالرياضيات المعاصرة بمعادلة عامة على النحو التالي:

$$\bar{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_1 \int_2 \frac{d\bar{l}_2 \times [d\bar{l}_1 \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)]}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} \quad (4-26)$$

ويمكن فهم المعادلة (4-26) بالرجوع للشكل رقم (٤-٥)، حيث إن:

$\vec{F}_2$  : القوة التي تؤثر بها الدارة (1) على الدارة (2).  
 $\vec{r}, d\vec{l}$  عنصر طول وبعد، حسب الشكل رقم (٤-٥)



الشكل رقم (٤-٥)

وتجدر الإشارة هنا إلى أن  $\vec{F}_2$  قوة متبادلة بين الدارتين الكهريائيتين (حسب قانون نيوتن الثالث - لكل فعل رد فعل) أي أن:

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

حيث إن  $\vec{F}_1$  القوة التي تؤثر بها الدارة (2) على الدارة (1). لقد بينا سابقا (المعادلة (4-12)) أن:

$$\vec{F} = \oint_c I d\vec{l} \times \vec{B}$$

وبتطبيق العلاقة السابقة على الحالة المبينة في الشكل رقم (٤-٦) نجد أن:

$$\vec{F}_2 = \oint_2 I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}(\vec{r}_2)$$

ومن التماثل بين العلاقة السابقة والمعادلة (4-26) نجد أن:

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad \dots (4-27)$$

تعرف المعادلة (4-27) بقانون بيوت - سافارت. كما يطلق اسم قانون بيوت - سافارت على الصيغة التفاضلية للمعادلة (4-27)، وهي:

$$d\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad \dots(4-28)$$

والمعادلة (4-28) تمكننا من حساب المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  في نقطة معينة على بعد  $\vec{r}_2$  من نقطة الأصل، (أي على بعد  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  من عنصر التيار) الناتج عن عنصر تيار  $I_1 d\vec{l}_1$  على بعد  $\vec{r}_1$  من نقطة الأصل كما هو موضح في الشكل رقم (4-5).

أما في حالة التوزيع المتصل للتيار والذي يمكن وصفه بالعلاقة:

$$\vec{J}(\vec{r}_1) dv_1 = I_1 d\vec{l}_1$$

فإن التعويض عن  $I_1 d\vec{l}_1$  من العلاقة السابقة في المعادلتين (4-28) و (4-27) نحصل على:

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v_1} \frac{\vec{J}(\vec{r}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} dv_1 \quad \dots(4-29)$$

$$d\vec{B}_2(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} dv_1 \quad \dots(4-30)$$

وقبل الانتهاء من المجال المغناطيسي  $\vec{B}$ ، نود الإشارة إلى خاصية هامة له وهي أن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \dots(4-31)$$

دلالة على عدم إمكانية وجود أقطاب مغناطيسية مفردة مطلقا، أو أن التدفق  $\Phi$  من أي سطح مغلق يساوي صفر دائما. أي أن:

$$\oiint_s \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0$$

ويمكن إثبات المعادلة (4-31) رياضيا على النحو التالي:

بالاستعانة بالمتطابقة التالية:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot \vec{F}$$

فإن مفكوك المعادلة (4-29) يكون:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_2 \cdot \vec{B}(\vec{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \vec{\nabla}_2 \cdot \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right] dv_1 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \left\{ \left[ \vec{\nabla}_2 \times \vec{J}(\vec{r}_1) \right] \cdot \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} - \left[ \vec{\nabla}_2 \times \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right] \cdot \vec{J}(\vec{r}_1) \right\} dv_1 \end{aligned}$$

ولكن:  $\vec{\nabla}_2 \times \vec{J}(\vec{r}_1) = 0$ ؛ لأن كثافة التيار ثابتة.

كذلك:

$$\vec{\nabla}_2 \times \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \vec{\nabla}_2 \times \left[ -\vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) \right] = 0$$

(اللف لأي تدرج = صفر)

هناك عديد من المسائل التي يمكن معالجتها باستخدام المعادلتين

(4-27) و (4-29) التاليتين:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \\ \vec{B}(\vec{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} dv_1 \end{aligned}$$

ولكن الذي يحد من استخدام المعادلتين هو صعوبة التكاملات التي قد

تتجم في بعض المسائل ولكن هناك طرقاً أخرى لحساب  $\vec{B}$ ، على غرار

استخدام قانون جاوس لحساب المجال  $\vec{E}$ .

-

يستخدم ملفا هلمولتز في عديد من التطبيقات العملية ويتكون من ملفين حلقين متماثلين ومتوازيين، موضوعين على نفس المحور وتفصلهما مسافة يتم اختيارها للحصول على مجال مغناطيسي  $\vec{B}$  منتظم تقريبا عند نقطة تقع على المحور المشترك في منتصف المسافة بين الملفين، ويوصل الملفين معا على التوالي. بحيث إذا مر تيار في الملف الأول فإن نفس التيار يمر في الملف الثاني، وفي نفس الاتجاه. كما أن للملفين نفس العدد من اللفات. ولإيجاد المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  على محور الملفين الناتج عن ملفين عدد لفات كل منهما  $N$  عندما يمر تيار خلالهما شدته  $I$  علما بأن نصف قطر كل منهما  $a$  والمسافة بينهما  $2b$ . وإيجاد المسافة بينهما التي تجعل المجال على المحور منتظما.

إن المجال الناتج عن لفة واحدة من السلك في النقطة  $P$  يساوي:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}$$

أما المجال  $\vec{B}$  الناتج عن عدد  $N$  من اللفات من الملف السفلي (1) فيساوي:

$$\vec{B}_1(z) = \frac{N \mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}$$

والمجال الناتج عن عدد  $N$  من اللفات من الملف العلوي (2) فيساوي:

$$\vec{B}_2(z) = \frac{N \mu_0 I a^2}{2[(2b - z)^2 + a^2]^{3/2}} \hat{z}$$

وبما أن التيارين في الملفين بنفس الاتجاه فإن المجالين الناتجين عنهما في النقطة  $P$  يكونان بنفس الاتجاه، وبالتالي فإن المجال المحصل في النقطة  $P$  يكون.

$$\bar{B}(z) = \bar{B}_1(z) + \bar{B}_2(z) = \frac{N \mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} + \frac{N \mu_0 I a^2}{2[(2b - z)^2 + a^2]^{3/2}} \hat{z}$$

وقيمة هذا المجال المحصل تساوي:

$$|\bar{B}(z)| = \frac{N \mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(2b - z)^2 + a^2]^{3/2}} \right\} \dots (4-32)$$

ونريد الآن البحث عن وضع للمفين (أي مقدار المسافة بينهما  $2b$ ) بحيث يجعل المجال على المحور المشترك بين المفين منتظما. ويمكن إيجاد ذلك بأخذ المشتقة الأولى والثانية للمعادلة (4-32) ومساواة الأخيرة بالصفر. على النحو التالي:

$$\frac{dB(z)}{dz} = \frac{N \mu_0 I a^2}{2} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{2z}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{2(z - 2b)}{[(2b - z)^2 + a^2]^{5/2}} \right\} \dots (4-33)$$

لاحظ أن المعادلة (4-33) تساوي صفرا فقط إذا كانت  $z = b$ ، أي أن:

$$\left. \frac{dB(z)}{dz} \right|_{z=b} = 0$$

أما المشتقة الثانية للعلاقة (4-32) أو المشتقة الأولى للعلاقة (4-33) فتساوي:

$$\frac{d^2B(z)}{dz^2} = -\frac{3N \mu_0 I a^2}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2z^2}{(z^2 + a^2)^{7/2}} \\ & + \frac{1}{[(2b - z)^2 + a^2]^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2(z - 2b)^2}{[(2b - z)^2 + a^2]^{7/2}} \end{aligned} \right\}$$

وبالتعويض عن  $z$  في العلاقة السابقة بالمقدار  $b$  (أي  $z = b$ ) فإن:

$$\frac{d^2B(z)}{dz^2} = -\frac{3}{2} \mu_0 N I a^2 \left\{ \frac{b^2 + a^2 - 5b^2 + b^2 + a^2 - 5b^2}{(b^2 + a^2)^{7/2}} \right\}$$



وهذه المعادلة تنتهي عند  $a^2 - 4b^2 = 0$ . إذن الاختيار المناسب لقيمة  $b$  هو  $2b = a$  ، وهذا يعني أن المسافة الفاصلة بين الملفين يجب أن تساوي نصف قطر الملف.

المجال المغناطيسي في هذه الحالة (أي عندما  $z = b$  و  $a = 2b$ ) يمكن إيجاد قيمته بالتعويض في العلاقة (4-32) كما يلي:

$$B(z) = -\frac{N \mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 + a^2 \right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[ a^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\}$$

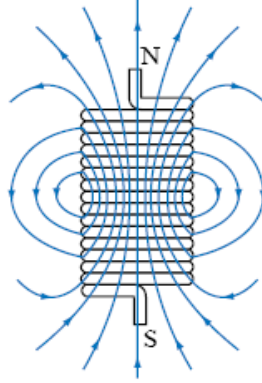
$$\begin{aligned} B(z) &= -\frac{N \mu_0 I a^2}{2} \left\{ \left( \frac{4}{5a^2} \right)^{3/2} + \left( \frac{4}{5a^2} \right)^{3/2} \right\} \\ &= N \mu_0 I a^2 \left( \frac{4}{5a^2} \right)^{3/2} \\ &= \frac{\mu_0 N I}{a} \frac{8}{5^{3/2}} \end{aligned}$$

ويمكننا إثبات أن المجال المغناطيسي في المناطق القريبة من منتصف المسافة بين الملفين لا يتغير كثيرا أو بالتالي يمكن اعتباره منتظما.

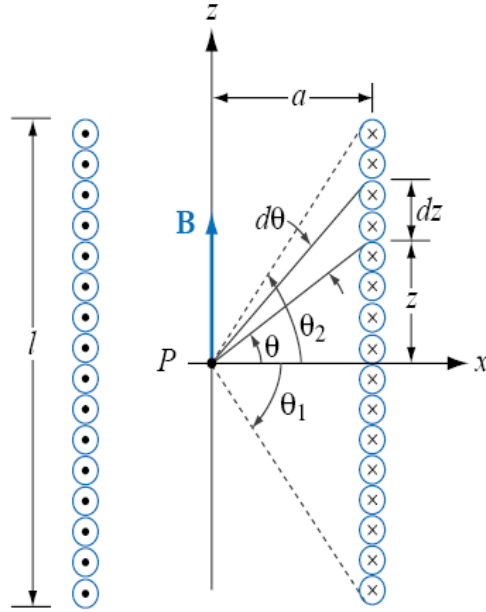
-

الملف اللولبي عبارة عن ملف من سلك ملفوف بشكل متراص على أسطوانة كما في الشكل رقم (٤-٦) وعند مرور تيار كهربائي في الملف يتولد مجال مغناطيسي منتظم تقريبا بداخله ويعمل عندها الملف عمل

قضييب مغناطيسي. افترض ملفا لوليبيا طولاه  $L$  ونصف قطره  $a$  وعدد لفاته  $N$  بحيث يقع محوره على المحور  $z$  كما في الشكل رقم (٤-٧).



الشكل رقم (٤-٦)



الشكل رقم (٤-٧)

ولإيجاد المجال المغناطيسي في نقطة مثل  $P$  تقع على المحور  $z$  وعلى بعد  $z_0$  من نقطة الأصل، نقسم طول الملف اللولبي لأجزاء صغيرة كل منها  $dz$ . ولإيجاد المجال المغناطيسي الناتج عن الطول  $dz$ ، يمكننا استخدام العلاقة التالية والتي تعطى المجال على المحور  $z$  الناتج عن حلقة نصف قطرها  $a$ ، وهي:

$$\bar{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(Z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{Z}$$

أما قيمة المجال الناشئ عن عدد من اللفات  $\Delta N$  المتواجدة في عنصر الطول  $\Delta Z$  فتساوي:

$$\Delta B_2(Z_0) = \frac{\mu_0 I a^2 \Delta N}{2[(Z_0 - Z)^2 + a^2]^{3/2}} \quad \dots\dots(4-34)$$

ولكن، بما أن اللفات منتظمة، فإن:

$$\frac{\Delta N}{\Delta Z} = \frac{N}{L}$$

ومنها فإن :-

$$\Delta N = \frac{N}{L} \Delta Z$$

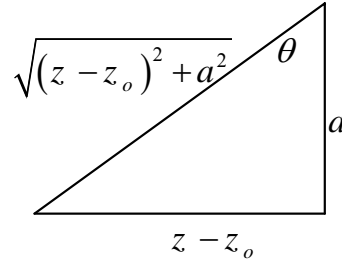
وبالتعويض عن  $\Delta N$  من العلاقة السابقة في المعادلة (4-34) نجد أن:

$$\Delta B_z(z_0) = \frac{\mu_0 I a^2 N \Delta z}{2L [(z_0 - z)^2 + a^2]^{3/2}}$$

وبإجراء التكامل للعلاقة السابقة، نجد أن:

$$B_z(Z_0) = \frac{\mu_0 I a^2 N}{2L} \int_0^L \frac{dZ}{[(Z_0 - Z)^2 + a^2]^{3/2}} \quad (4-35)$$

من الشكل رقم (٤-٨)



الشكل رقم (٤-٨)

افترض أن

$$\frac{z - z_0}{a} = \tan \theta$$

$$dZ = a \sec^2 \theta d\theta \quad \dots (4-36)$$

ومن الشكل (٤-٨) أيضاً فإن:

$$\sqrt{(Z_0 - Z)^2 + a^2} = \frac{a}{\cos \theta} \quad \dots (4-37)$$

بالتعويض عن (4-36) و (4-37) في المعادلة (4-35) نحصل على:

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 I a^2 N}{2L} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a^3 / \cos^3 \theta} = \frac{\mu_0 N}{2L} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 NI}{2L} [\sin \theta_2 - \sin \theta_1] \quad \dots (4-38)$$

ولأجل تقريب العلاقة فإن علينا كتابتها بدلالة الزاويتين  $\alpha_1, \alpha_2$  بدلالة من  $\theta_2, \theta_1$  وحسب الشكلين (٤-٧) و (٤-٨) فإن:

$$\sin \theta_1 \Big|_{z=0} = \frac{-z_0}{\sqrt{z_0^2 + a^2}} = -\left( \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + a^2}} \right) = -\cos \alpha_1$$

$$\sin \theta_2 \Big|_{z=L} = \frac{L - z_0}{\sqrt{(L - z_0)^2 + a^2}} = \cos \alpha_2$$

وبالتعويض عن  $\sin \theta_2, \sin \theta_1$  في المعادلة (4-38)، نحصل على:

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 NI}{2L} [\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1] \quad \dots(4-39)$$

فإذا كان الملف اللولبي طويلاً نسبياً مقارنة مع نصف قطره ( $L \gg a$ ) وكانت  $z_0$  غير قريبة من الصفر أو  $L$  فإن الزاويتين  $\alpha_1, \alpha_2$  تقتربان من الصفر. وبالتالي يمكن التعويض عن أي من الزاويتين بظليلهما ( $\tan \alpha_2, \tan \alpha_1$ ) على النحو التالي:

$$\alpha_1 = \tan \alpha_1 = \frac{a}{z_0}$$

$$\alpha_2 = \tan \alpha_2 = \frac{a}{L - z_0}$$

وبإيجاد مفكوك  $\cos \alpha_2, \cos \alpha_1$  في المعادلة (4-39) باستخدام المتسلسلة التالية:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

وإذا اكتفينا بالحدود التربيعية فقط من المتسلسلة السابقة فإن:

$$\cos \alpha_1 \cong 1 - \frac{1}{2} \alpha_1^2, \quad \cos \alpha_2 \cong 1 - \frac{1}{2} \alpha_2^2$$

$$\therefore \cos \alpha_1 \cong 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{z_0} \right)^2, \quad \cos \alpha_2 \cong 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{(L - z_0)^2} \right) \quad \dots(4-40)$$

وهكذا بعد التعويض في المعادلة (4-39) عن الكمية

$\cos \alpha_2, \cos \alpha_1$  ، نحصل على:

$$B_z(z_0) \cong \frac{\mu_0 NI}{2L} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z_0^2} + 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{(L - z_0)^2} \right]$$

$$B_z(z_0) \cong \frac{\mu_0 NI}{L} \left[ 1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{z_0^2} - \frac{1}{4} \frac{a^2}{(L - z_0)^2} \right] \quad (4-41)$$

ونلاحظ من المعادلة (4-41)، أننا إذا عوضنا عن  $z_o = \frac{L}{2}$  (أي نريد إيجاد المجال في منتصف الملف) وعن  $L = 10a$ ، فإن قيمة المجال من المعادلة (4-41) تساوي:

$$B_z(z_o) \cong \frac{\mu_0 NI}{L} \left[ 1 - \frac{1}{100} - \frac{1}{100} \right] \cong \frac{\mu_0 NI}{L} \left[ 1 - \frac{2}{100} \right] \cong \frac{0.98 \mu_0 NI}{L}$$

أما إذا استخدمنا العلاقة (4-41) بدون الحدود التقريبية، أي استخدامها على النحو التالي:

$$B_z(z_o) \cong \frac{\mu_0 NI}{L} \quad \dots(4-42)$$

فإن نسبة الخطأ بين  $0.98 \mu_0 NI$  و  $\mu_0 NI$  تساوي 2%. وهذه النسبة صغيرة ويمكن إهمالها في معظم التطبيقات العملية التي تستخدم الملفات اللولبية وبالتالي تستخدم المعادلة (4-42) بدون حرج. وتكتب عادة على النحو التالي:

$$B_z(z_o) \cong \mu_0 nI \quad \dots(4-43)$$

حيث  $n$  عدد لفات الملف لكل وحدة طول وتساوي  $\frac{N}{L}$ .

بينما فيما سبق أن المجال المغناطيسي ينشأ عن مرور تيار كهربائي في سلك موصل. يمكن حسابه من إحدى العلاقتين التاليتين:

$$\bar{B}(\bar{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\bar{l}_1 \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3}$$

$$\bar{B}(\bar{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\bar{J}(\bar{r}_1) \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} dv_1$$

ويمكننا إيجاد اللف (Curl) للمجال المغناطيسي للعلاقة السابقة على النحو التالي:

$$\bar{\nabla}_2 \times \bar{B}(\bar{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \bar{\nabla}_2 \times \left[ \frac{\bar{J}(\bar{r}_1) \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} \right] dv_1 \quad \dots (4-44)$$

وبالاستعانة بالمتطابقة التالية:

$$\bar{\nabla} \times (\bar{F} \times \bar{G}) = (\bar{\nabla} \cdot \bar{G})\bar{F} - (\bar{\nabla} \cdot \bar{F})\bar{G} + (\bar{G} \cdot \bar{\nabla})\bar{F} - (\bar{F} \cdot \bar{\nabla})\bar{G}$$

فإن المعادلة (4-44) تصبح على النحو التالي:

$$\bar{\nabla}_2 \times \bar{B}(\bar{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \left[ \begin{aligned} & \left( \bar{\nabla}_2 \cdot \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} \right) \bar{J}(\bar{r}_1) - (\bar{\nabla}_2 \cdot \bar{J}(\bar{r}_1)) \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} \\ & + \left( \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} \cdot \bar{\nabla}_2 \right) \bar{J}(\bar{r}_1) - (\bar{J}(\bar{r}_1) \cdot \bar{\nabla}_2) \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} \end{aligned} \right] dv_1$$

فإذا كان التيار الكهربائي ثابتا (steady) فإن:

$$\bar{\nabla}_2 \cdot \bar{J}(\bar{r}_1) = 0$$

وكذلك

$$\left( \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} \cdot \bar{\nabla}_2 \right) \bar{J}(\bar{r}_1) = 0$$

أي أن:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_2 \times \bar{B}(\bar{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \left( \bar{\nabla}_2 \cdot \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} \right) \bar{J}(\bar{r}_1) dv_1 \\ &\quad - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v (\bar{J}(\bar{r}_1) \cdot \bar{\nabla}_2) \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} dv_1 \end{aligned}$$

$$\bar{\nabla}_2 = -\bar{\nabla}_1 \quad , \quad \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = -(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$$

فإن:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_2 \times \bar{B}(\bar{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \bar{J}(\bar{r}_1) \left( \bar{\nabla}_2 \cdot \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} \right) dv_1 \\ &\quad - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v (\bar{J}(\bar{r}_1) \cdot \bar{\nabla}_1) \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} dv_1\end{aligned}$$

أما التكامل الأول في العلاقة السابقة فيساوي:

$$\int \bar{\nabla}_2 \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} dv_1 = \iint_s \frac{(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \cdot \hat{n} da}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} = \frac{4\pi |\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} = 4\pi$$

أما التكامل الآخر فيمكن إثبات بأنه يساوي صفراً.

وبذلك نستنتج مما سبق أن:

$$\bar{\nabla} \times \bar{B}(\bar{r}_2) = \mu_0 \bar{J}(\bar{r}_2) \quad \dots(4-45)$$

وتعرف المعادلة (4-45) بالشكل التفاضلي لقانون أمبير. وبإجراء التكامل

السطحي لطريف المعادلة (4-45)، فإن:

$$\int_s \bar{\nabla} \times \bar{B}(\bar{r}_2) \cdot \hat{n} da = \mu_0 \int_s \bar{J}(\bar{r}_2) \cdot \hat{n} da$$

وباستخدام نظرية ستوكس يمكننا تحويل التكامل السطحي في

الطرف الأيسر للمعادلة (4-45) إلى تكامل خطي. أي أن:

$$\int_s \bar{\nabla} \times \bar{B}(\bar{r}_2) \cdot \hat{n} da = \oint_c \bar{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_s \bar{J}(\bar{r}_2) \cdot \hat{n} da = \mu_0 I$$

أي أن:

$$\oint_c \bar{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_s \bar{J} \cdot \hat{n} da = \mu_0 I \quad \dots(4-46)$$

وتشير المعادلة (4-46) إلى أن التكامل الخطي للمجال المغناطيسي  $\bar{B}$  حول

مسار مغلق يساوي  $\mu_0$  مضروباً في محصلة التيار الكهربائي الواقع داخل

ذلك المسار، وهذا هو شكل آخر لقانون أمبير.



( - )

دخل بروتون بسرعة  $83.5 \frac{km}{s}$  منطقة مجال مغناطيسي منتظم شدته  $B = 5mT$  إذا علمت أن كتلة البروتون  $(1.67 \times 10^{-27} kg)$  وشحنته  $(1.6 \times 10^{-19} C)$ . احسب:

- ١- القوة المؤثرة على البروتون لحظة دخوله منطقة المجال.
- ٢- نصف قطر المسار الدائري الذي يتحرك به البروتون.
- ٣- الزمن اللازم للبروتون لإتمام دورة كاملة.
- ٤- التردد الزاوي لحركة البروتون.

الحل:

$$|\vec{F}| = qvB \sin \theta \quad -١$$

$$= 1.6 \times 10^{-19} \times 83.5 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-3}$$

عمودية على اتجاه السرعة =  $6.68 \times 10^{-17} N$

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \quad -٢$$

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{1.67 \times 10^{-27} \times 83.5 \times 10^3}{1.67 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^{-3}}$$

$$R = 0.167m$$

-٣

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$= \frac{2 \times 3.14 \times 0.167}{83.5 \times 10^3}$$

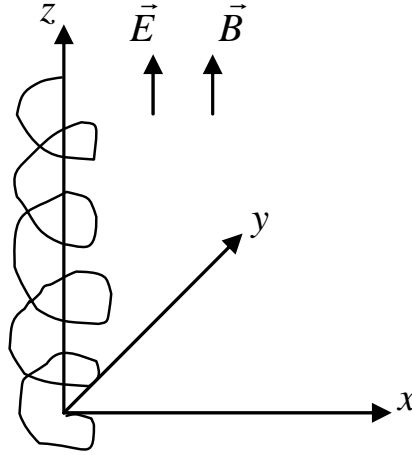
$$= 1.25 \times 10^{-5} s = 12.56 \mu s$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$= \frac{83.5 \times 10^5}{0.167} = 5 \times 10^5 \text{ Hz}$$

( - )

دخل بروتون منطقة فيها مجالان منتظمان أحدهما مغناطيسي  
والآخر كهربائيية  $\vec{B} = 5 \times 10^{-4} \hat{k}$  وبسرعة ابتدائية  
 $\vec{v}_0 = 2.5 \times 10^5 \hat{i}$  كما في الشكل رقم (٩-٤). صف حركة البروتون،  
وأوجد موضعه بعد إكماله ثلاث دورات.



الشكل رقم (٩-٤)

الحل:

تؤثر في البروتون قوة ابتدائية (قوة لورنتز) تعطي بالعلاقة:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_o &= \vec{F}_E + \vec{F}_M = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \\
 &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\
 &= q\left(\vec{E} \hat{k} + v_o \hat{i} \times B \hat{k}\right) = q\left(E \hat{k} - v_o B \hat{j}\right) \\
 &= 1.6 \times 10^{-19} \left(5 \hat{k} - 2.5 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-4} \hat{j}\right) \\
 &= 8.0 \times 10^{-19} \hat{k} - 2.0 \times 10^{-17} \hat{j}
 \end{aligned}$$

تؤثر المركبة الأولى للقوة السابقة (مركبة المجال الكهربائي) بقوة ثابتة وينتج عنها تسارعا باتجاه  $z$  وبالتالي فإن:

$$z = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{qE}{m} \right) t^2$$

المركبة التالية (مركبة المجال المغناطيسي) فهي متغيرة بالاتجاه وتبقى باتجاه معاكس لـ  $y$ . والزمن الدوري لها  $T$  يعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{2\pi r}{v_o} \\
 &= \frac{2\pi m}{qB}
 \end{aligned}$$

بعد ثلاث دورات

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{1}{2} \left( \frac{qE}{m} \right) (3T)^2 \\
 &= \frac{18\pi^2 Em}{qB^2} \\
 &= 37m
 \end{aligned}$$

( - )

جسيم مشحون كتلته  $m$  يحمل شحنة قدرها  $q$  متحركة في مجال مغناطيسي منتظم  $\vec{B}_o$  بين أن حركة الجسيم بشكل عام تكون لولبية (Helix) نصف قطرها يساوي:

$$R = \frac{m v_{\perp}}{qB}$$

حيث تمثل  $v_{\perp}$  مركبة السرعة العمودية على المجال المغناطيسي.

الحل:

يؤثر في الشحنة  $q$  قوة مغناطيسية  $\vec{F}_m$  تعطى بالعلاقة:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}_o \quad \dots(1)$$

ولنفرض أن الجسيم دخل منطقة المجال بسرعة  $\vec{v}$  تعطى بالعلاقة:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel} \quad \dots(2)$$

حيث  $\vec{v}_{\parallel}$  السرعة الموازية لاتجاه المجال  $\vec{B}_o$ .

وبالتعويض عن  $\vec{v}$  من المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على:

$$\vec{F}_m = qv_{\perp} \times \vec{B}_o + q\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}_o$$

وبما أن  $\vec{v}_{\parallel}$  توازي  $\vec{B}_o$  فإن:

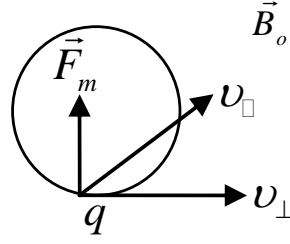
$$q\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}_o = 0$$

$$\vec{F}_m = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}_o$$

ومنها فإن:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_m| &= q |\vec{v}_{\perp}| |\vec{B}_o| \sin 90 \\ &= q v_{\perp} B_o \end{aligned}$$

ونلاحظ من الشكل رقم (٤-١٠)



الشكل رقم (٤-١٠)

أن  $\vec{F}_m$  تؤثر عموديا على  $\vec{B}_0$  وعلى  $\vec{v}_\perp$  وبالتالي تتحرك الشحنة على مسار دائري نصف قطره  $R$  وبتسارع مركزي  $a_R$ ، يعطى بالعلاقة:

$$a_R = \frac{v_\perp^2}{R} = \frac{F_m}{m}$$

وبما أنه يؤثر في الجسم في الوقت نفسه سرعة عمودية على السرعة  $\vec{v}_\perp$  أي السرعة  $\vec{v}_\perp$  بالاتجاه  $\vec{B}_0$  فإن هذه السرعة تعمل على إزاحة الجسم بالاتجاه  $y$  مشكلة مسارا لولبيا نصف قطر  $R$ ، يعطى بالعلاقة:

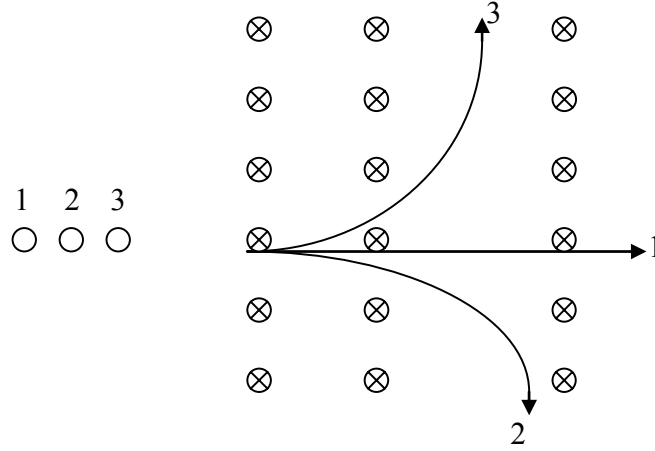
$$R = \frac{mv_\perp^2}{F_m} = \frac{mv_\perp^2}{qv_\perp B} = \frac{mv_\perp}{qB} \quad (\text{مقداره ثابت})$$

وبالمقارنة مع نتيجة المثال (٢-٤)، نجد أنه بالإمكان الحصول على مسار لولبي بطريقتين الأولى بتأثير مجالين أحدهما كهربائي والآخر مغناطيسي، والطريقة الثانية بتأثير مجال مغناطيسي فقط ولكن شريطة دخول الجسم بزاوية معينة ( $\theta$  بين السرعة والمجال  $\vec{B}$ ) بحيث لا تكون  $v_\perp$  مساوية صفرا.

( - )

دخلت ثلاث جسيمات منطقة مجال مغناطيسي منتظم بشكل عمودي، كما في الشكل رقم (٤-١١) ما شحنة كل

جسيم إذا علمت أن السرعة الابتدائية لحظة دخول المجال وكتلتهم  
متماثلة؟



الشكل رقم (٤- ١١)

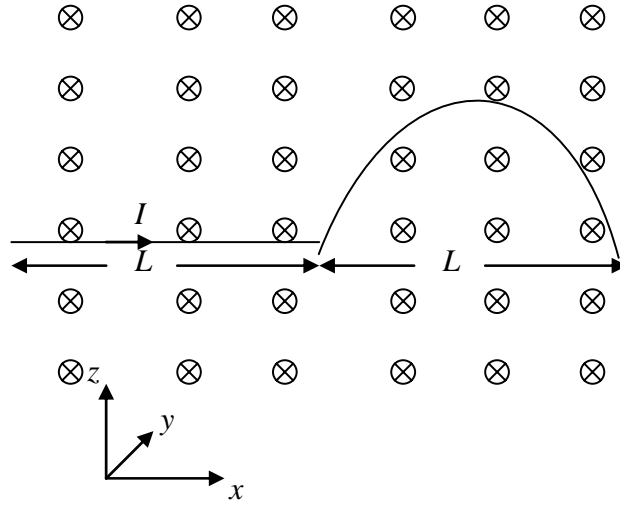
الحل:

بما أن الجسم الأول لم يتأثر بالمجال المغناطيسي على الرغم من دخوله باتجاه عمودي عليه وبسرعة  $v_0$  أدت إلى انحراف الجسمين الآخرين ما عدا هذا الجسيم فإن شحنته تساوي صفرا أي أنه متعادل.  
أما الجسيم الثاني فشحنته سالبة لأن الانحراف باتجاه عقارب الساعة وحسب قاعدة اليد اليمنى فإن شحنته يجب أن تكون سالبة.  
وأخيرا فإن شحنة الجسيم الثالث موجبة لأن انحرافه باتجاه مضاد لعقارب الساعة.

( - )

احسب القوة المغناطيسية الكلية المؤثرة في سلك مثني على النحو المبين في الشكل رقم (٤-١٢). إذا وضع في مجال مغناطيسي منتظم يؤثر

عموديا على المستوى الواقع فيه السلك. إذا علمت أن طول القطعة المستقيمة  $L$  وقطر نصف الحلقة  $L$  أيضا ويمر بها تيار شدته  $I$  بالاتجاه المبين.



الشكل رقم (٤-١٢)

الحل:

لنفرض أن السلك متواجد في المستوى  $xz$  ويؤثر المجال  $\vec{B}$  في

الاتجاه  $y$ . بتطبيق العلاقة (١١ - ٤) فإن:

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B} \quad \dots(1)$$

$$d\vec{l} = dx\hat{x} + dz\hat{z} \quad \dots(2)$$

$$\vec{B} = B\hat{y} \quad \dots(3)$$

$$\vec{F} = I \int_2 [(dx\hat{x} + dz\hat{z}) \times (B\hat{y})] = I \int \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ dx & 0 & dz \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix}$$

$$= I \int [(-Bdz)\hat{x} + (Bdx)\hat{z}]$$

$$= IB \left[ -\int dz\hat{x} + \int_0^{2L} dx\hat{z} \right] = 2LIB\hat{z}$$

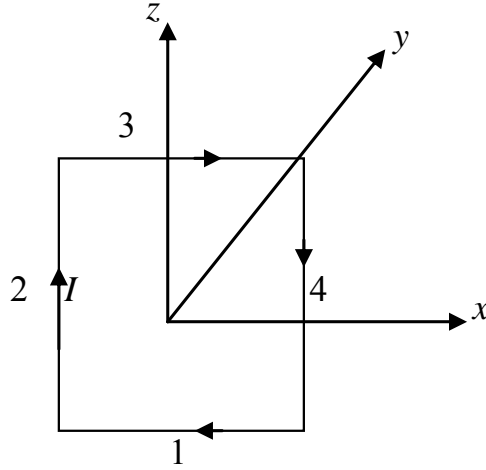
نلاحظ أن القوة المحصلة باتجاه  $\hat{z}$  الموجب ولا يوجد أي تأثير بالاتجاه  $\hat{x}$  لأن  $\int dz$  يساوي صفرا. والقوة كذلك على السلك المستقيم  $(LIB\hat{z})$  تساوي القوة على نصف الحلقة  $(LIB\hat{z})$  هي كذلك تساوي القوة على سلك طوله بالاتجاه  $x$  يساوي  $2L$  بغض النظر عن شكله.

( - )

مسار مغلق على شكل مربع طول ضلعه  $a$ ، ويقع في المستوى  $xz$  ويحمل تيارا شدته  $I$  في الاتجاه المبين في الشكل رقم (٤-١٣). أوجد القوة المغناطيسية  $\vec{F}_m$  إذا كانت:

$$\vec{B} = B\hat{x} \quad -1$$

$$\vec{B} = B\hat{y} \quad -2$$



الشكل رقم (٤-١٣)

الحل:

١- عندما يكون المجال  $\vec{B}$  موازيا للمحور  $x$  كما في الشكل (٤-١٤)

فإن:



$$\begin{aligned}
 \vec{F}_m &= I \oint_c \vec{dl} \times \vec{B} = I \left[ \oint_1 \vec{dl} \times \vec{B} + \oint_2 \vec{dl} \times \vec{B} + \oint_3 \vec{dl} \times \vec{B} + \oint_4 \vec{dl} \times \vec{B} \right] \\
 &= I \left[ \int_1 (-dx\hat{x} \times B\hat{x}) + \int_2 (dz\hat{z} \times B\hat{x}) - \int_3 (dx\hat{x} \times B\hat{x}) + \int_4 (-dz\hat{z} \times B\hat{x}) \right] \\
 &= 0 + I \int_0^a (+Bdz)\hat{y} + 0 + I \int_0^a (-Bdz)\hat{y} \\
 &= +IBa\hat{y} - IBa\hat{y} = 0
 \end{aligned}$$

أي أنه يؤثر في الضلع (2) قوة  $(IBa\hat{y})$  باتجاه  $\hat{y}$  ويؤثر في الضلع (4) قوة مساوية ولكن باتجاه  $y$  السالب أي  $(-IBa\hat{y})$  وبما أنهما يؤثران في المسار باتجاهين متضادين ولكن خط عملهما ليس على استقامة واحدة فإن القوتين تؤثران بدوران على المسار.

-٢- عندما يكون المجال  $\vec{B}$  موازياً للمحور  $y$ .

$$\vec{F}_m = I \oint_c \vec{dl} \times \vec{B}$$

نلاحظ من الشكل (١٢-٤) أن  $d\vec{l}$  مهما تغيرت على المسار المغلق فإن  $\vec{B}$  عمودية عليها وثابتة المقدار (أي  $\vec{B}$  منتظمة) وبالتالي فإن:

$$\vec{F}_m = I \left( \oint_c \vec{dl} \right) \times \vec{B} = 0$$

نظراً لأن  $\oint_c \vec{dl}$  يساوي صفراً حول مسار مغلق.

لاحظ أن النتائج السابقة تنطبق على أي مسار مغلق يقع في المستوى

$xz$  مهما كان شكله.

( - )

أوجد العزم المغناطيسي  $\vec{m}$  لإلكترون ذرة الهيدروجين.

**الحل:**

يدور إلكترون ذرة الهيدروجين حول نواة محتوية على بروتون في مسار مغلق نصف قطره  $5.3 \times 10^{-11} m$  حسب نموذج بور.

$$\vec{m} = I\vec{A} \quad \dots(1)$$

أما  $|\vec{A}|$  فيمكن إيجادها من نصف قطر مدار الإلكترون في الذرة أي أن:

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= 3.14 \times (5.3 \times 10^{-11})^2 \\ &= 8.82 \times 10^{-21} m^2 \end{aligned}$$

وأما التيار  $I$  فيمكن إيجاداه على النحو التالي:

$$I = \frac{e}{T}$$

أما الزمن  $T$  فيساوي:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \dots(3)$$

ولإيجاد  $v$  نطبق قانون نيوتن الثاني، حيث إن قوة الجذب الكهربائي  $F_E$  نحو

المركز تساوي كتلة الإلكترون مضروبة في التسارع المركزي  $a_c$  أي أن:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r}} = \sqrt{\frac{9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{9.1 \times 10^{-31} \times 5.3 \times 10^{-11}}} \\ &= 2.2 \times 10^6 m/s \end{aligned}$$

وبالتعويض عن  $v$  في المعادلة (3) نجد أن:

$$T = \frac{2\pi \times 5.3 \times 10^{-11}}{2.2 \times 10^6}$$

$$= 1.513 \times 10^{-16} \text{ s}$$

وبالتعويض عن  $T$  في المعادلة (2) نحصل على:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{1.513 \times 10^{-16}}$$

$$= 1.06 \times 10^{-3} \text{ A}$$

أي أن  $|\vec{m}|$  من المعادلة (1) تساوي:

$$|\vec{m}| = I |\vec{A}| = 1.06 \times 10^{-3} \times 8.32 \times 10^{-21}$$

$$= 9.32 \times 10^{-24} \text{ A.m}^2$$

هذا المثال تم إيجاد  $I$ ،  $T$ ، و  $m$  كل على حده لإعطاء فكرة عن قيمتها، كما يجب ملاحظة أن إلكترونات الذرات وكذلك البروتونات في النوى ما هي إلا ثنائيات مغناطيسية صغيرة لها عزم مغناطيسي. فإذا وضعت في مجال مغناطيسي  $\vec{B}$  سيكون عليها عزم ازدواج دوراني يساوي  $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ .

( - )

أوجد العزم المغناطيسي  $\vec{m}$  للمسار المغلق في المثال (٦-٤) وكذلك عزم الازدواج  $\vec{\tau}$ .

الحل:

$$-١ \text{ عندما } \hat{x} = \vec{B}$$

بما أن التيار  $I$  يسير باتجاه عكس عقارب الساعة فإن اتجاه  $\vec{A}$  يكون عموديا على مستوى المسار المغلق وبتجاه  $+y$ .

$$\vec{m} = I\vec{A} = +Ia^2 \hat{y}$$

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = Ia^2 \hat{y} \times B \hat{x} = -IBa^2 \hat{z}$$

$$\vec{B} = B \hat{y} \quad \text{عندما } -2$$

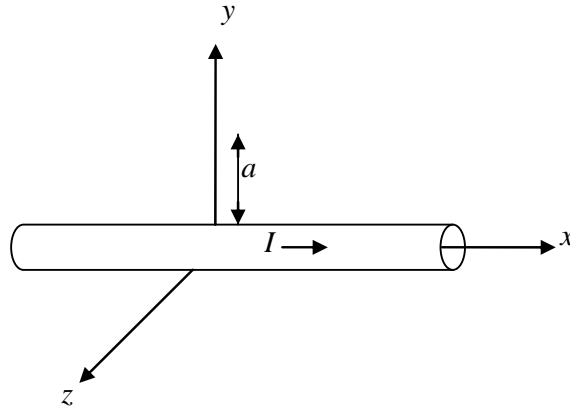
العزم المغناطيسي لن يتغير طالما  $\vec{A}$  أو  $I$  بنفس الاتجاه. أما  $\vec{\tau}$  فيمكن إيجادها على النحو التالي:

$$\vec{\tau} = Ia^2 \hat{y} \times B \hat{y} = 0$$

وتستخدم فكرة هذا المثال في تدوير الملفات التي يسير فيها تيار كهربائي. فإذا سار تيار كهربائي في ملف (كملف الجلفانومتر مثلا) فسيولد عزم ازدواج دوراني على الملف، إذا أثر أو واجه الملف مجال مغناطيسي.

( - )

سلك لا نهائي الطول يقع على امتداد المحور  $x$  ويحمل تيارا شدته  $I$  بالاتجاه المبين في الشكل رقم (٤-١٤). جد المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  على المحور  $y$  وعلى بعد  $a$  من السلك.



الشكل رقم (٤-١٤)

الحل:

يعطي المجال المغناطيسي في النقطة  $P$  الناتج عن عنصر التيار

بالعلاقة:

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad \dots(1)$$

لكن

$$d\vec{l} = \hat{x}dx \quad , \quad \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = a\hat{y} - x\hat{x}$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = (x^2 + a^2)^{1/2} \Rightarrow |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3 = (x^2 + a^2)^{3/2}$$

وبالتعويض عن الكميات السابقة في المعادلة (1) نحصل على:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\hat{x}dx \times (a\hat{y} - x\hat{x})}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} Ia \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \end{aligned} \quad (2)$$

من الشكل رقم (٤-١٤) فإن:

$$\phi = 180^\circ - \theta \Rightarrow \tan \phi = -\tan \theta = \frac{a}{x}$$

$$x = -\frac{a}{\tan \theta} \Rightarrow dx = a \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta} d\theta = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta \quad \dots(3)$$

ومن الشكل أيضا فإن:

$$\sin \phi = \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sin^3 \theta}{a^3} \quad \dots(4)$$

وبالتعويض عن  $dx$  من المعادلة (3) والمقدار  $\frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$  من المعادلة (4)

في المعادلة (2) نحصل على:

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \hat{z}$$

حيث إن: عندما  $\theta = 0$  ,  $x = -\infty$  ,

عندما  $\theta = \pi$  ,  $x = +\infty$  ,

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [-\cos \theta]_0^\pi \hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} [-2] \hat{z}$$

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{z}$$

ونلاحظ من النتيجة السابقة والتماثل في المسألة، أن المجال ثابت على بعد محدد من السلك ويكون عموديا دائما على المستوى الواقع من المتجهين  $\vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . أي أن خطوط المجال المغناطيسي عبارة عن دوائر مراكزها تقع على محور السلك المار فيه التيار، ويمكن استخدام قاعدة اليد اليمنى لتحديده.

( - )

أثبت أن المعادلة (4-26) يمكن تحويلها لتصبح على النحو التالي:

$$\vec{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_1 \int_2 \frac{(d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

وأن

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

الحل:

المعادلة (4-26) هي:

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_1 \int_2 \frac{d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad \dots(1)$$

باستخدام المتطابقة التالية:  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

فإن المعادلة (1) تصبح على النحو التالي:

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_1 \int_2 \left\{ \frac{d\vec{l}_1 [d\vec{l}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] - [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(d\vec{l}_2 d\vec{l}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right\}$$

أما الحد الأول فيساوي صفرا كما هو مبين فيما يلي:

$$\int_2 \frac{d\vec{l}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \int_2 d\vec{l}_2 \cdot \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \int_2 d\vec{l}_2 \cdot (-\vec{\nabla}_2 \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|})$$

لنفرض أن:

$$\varphi = \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \varphi = \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\int_2 d\vec{l}_2 \cdot (-\vec{\nabla}_2 \varphi) = \int_2 d\varphi = 0$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_1 \int_2 \frac{0 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) d\vec{l}_2 d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

ومن هنا فإن:

$$\vec{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_1 \int_2 (d\vec{l}_2 d\vec{l}_1) \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

أما القوة  $\vec{F}_1$  (المؤثرة في الدارة ١ بسبب الدارة ٢) فتساوي:

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_1 \int_2 (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1) \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

وبما أن

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

$$\therefore \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

( - )

استعن بنتائج المثال (٩-٤) لإيجاد المجال المغناطيسي على بعد  $a$  من منتصف سلك طوله  $L$  في نقطة تقع على العمود المنتصف للسلك.

الحل:

يختلف حل المثال الحالي عن المثال (٩-٤) بحدود التكامل فقط،

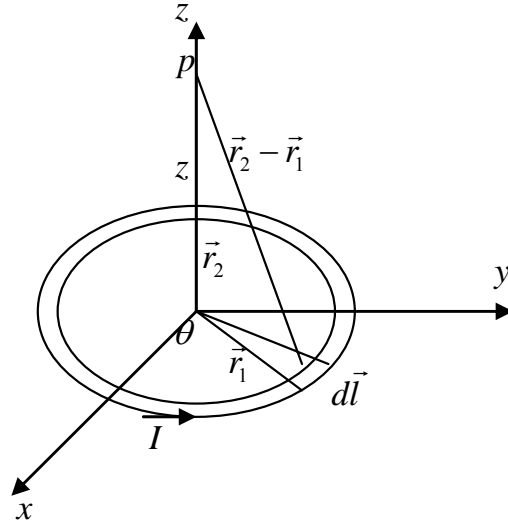
$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}_2) &= \frac{2\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \quad \hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} [-\cos \theta_2 - \cos \theta_1] \hat{z} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} [\cos(180^\circ - \theta) - \cos 90^\circ] \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cos \phi \\ \vec{B}(\vec{r}_2) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{L/2}{\sqrt{a^2 + \frac{L^2}{4}}} \quad \hat{z} = \frac{\mu_0 I L}{2\pi a \sqrt{4a^2 + L^2}} \hat{z} \end{aligned}$$

( - )

سلك على شكل حلقة دائرية نصف قطرها  $a$  وتحمل تيارا شدته  $I$  وتقع في المستوى  $xy$  كما في الشكل رقم (٤-١٥). أوجد المجال



المغناطيسي  $\vec{B}$  في نقطة مثل  $P$  تقع على المحور  $z$  المار في مركز الحلقة وعلى بعد  $z$  منه.



الشكل رقم (٤-١٥)

الحل:

إن المجال المغناطيسي في النقطة  $P$  الناتج عن عنصر التيار  $I d\vec{l}$

يعطى بالعلاقة:

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

ومن الشكل رقم (٤-١٥)، فإن:

$$d\vec{l} = (ad\theta)\hat{l} = ad\theta(-\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta)$$

$$= -a\sin\theta d\theta\hat{x} + a\cos\theta d\theta\hat{y}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = z\hat{z} - (a\cos\theta\hat{x} + a\sin\theta\hat{y})$$

$$= -a\cos\theta\hat{x} - a\sin\theta\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\begin{aligned}
d\vec{l} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -a\cos\theta & -a\sin\theta & z \end{vmatrix} ad\theta \\
&= [z \cos\theta \hat{x} + z \sin\theta \hat{y} + (a \sin^2\theta + a \cos^2\theta) \hat{z}] ad\theta \\
&= [z \cos\theta \hat{x} + z \sin\theta \hat{y} + a(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \hat{z}] ad\theta \\
d\vec{l} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) &= (z \cos\theta \hat{x} + z \sin\theta \hat{y} + a\hat{z}) ad\theta \\
|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3 &= (z^2 + a^2)^{3/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}_2) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(z \cos\theta \hat{x} + z \sin\theta \hat{y} + a\hat{z}) ad\theta}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0 I a}{4\pi (z^2 + a^2)^{3/2}} \left[ z \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \hat{x} + z \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta \hat{y} + a \int_0^{2\pi} d\theta \hat{z} \right] \\
&= \frac{\mu_0 I a}{4\pi (z^2 + a^2)^{3/2}} [0 + 0 + 2\pi a \hat{z}]
\end{aligned}$$

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \Rightarrow \vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}$$

نلاحظ من النتيجة السابقة أن المجال باتجاه  $\hat{z}$ . وهنا أيضا يمكن

استخدام قاعدة اليد اليمنى في تحديد اتجاه  $\vec{B}$ .

ولإيجاد المجال المغناطيسي للحلقة الدائرية عند نقطة في

مركزها. فان من نتيجة المثال السابق وعند التعويض عن  $z = 0$  نجد أن:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{z}$$

:

شريط رقيق وطويل جدا من المعدن عرضه  $W$  ويسري فيه تيار قيمته الكلية  $I$  أوجد المجال المغناطيسي في مستوى الشريط وعلى بعد  $b$  من الحافة القريبة من الشريط.

:

أوجد المجال المغناطيسي على بعد  $r$  من محور سلك مستقيم يحمل تيارا  $I$  مستخدما قانون أمبير وذلك عندما تكون  $r < R$  وكذلك  $r > R$  حيث  $R$  نصف قطر السلك. أثبت أن المجال يتلاشى عند محور السلك.

:

ثني سلك على شكل سداسي طول ضلعه  $a$  ويحمل تيارا قدره  $I$  أوجد المجال المغناطيسي في مركز الشكل السداسي.

:

اثبت أن الجهد المغناطيسي المتجه، لسلكين طويلين مستقيمين متوازيين يحملان نفس التيار ولكن باتجاهين متضادين، يساوي:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \hat{n}$$

حيث  $r_2, r_1$  يمثلان البعدين من النقطة المراد إيجاد الجهد فيها إلى السلكين و  $\hat{n}$  متجه الوحدة الموازي للسلكين.



## الخصائص المغناطيسية للمادة

-

ناقشنا كيفية نشوء المجال المغناطيسي، وكذلك كيفية حسابه لتوزيع معين من التيارات الكهربائية. فقد بينا مثلاً كيفية حساب المجال المغناطيسي في الفراغ المحيط لسلك يحمل تياراً، وذلك باستخدام قانون بيوت- سافارت. والسؤال الذي يطرح نفسه هو: هل يتغير المجال المغناطيسي عند إحاطة السلك (المر فيه التيار) بوسط مادي؟ والجواب على ذلك: نعم. فمن المعروف أن جميع المواد تتكون من ذرات. والذرات تحتوي على إلكترونات متحركة. وطالما أن تلك الإلكترونات متحركة في الذرة فإنها تولد تيارات، تدعى بالتيارات الذرية (atomic currents). ومن هنا يجب علينا التمييز بين صنفين من التيارات. الأول وهو الذي ينشأ عن حركة فعلية للإلكترونات الحرة والأيونات المشحونة في المادة، والثاني تيار ذري ينشأ عن حركة الإلكترون حول النواة ويتميز الأخير بعدم انتقال الشحنة في المادة. وهناك صفة مشتركة بين التيارين ألا وهي تكوين مجالات مغناطيسية.

## (Magnetization)

يعد كل تيار ذري ينشأ بسبب حركة الإلكترونات حول الذرات بمثابة دوائر كهربائية صغيرة جداً، لكنها ذات أبعاد ذرية. ويمكننا اعتبار أي تيار كهربائي مغلق كثنائي قطبي مغناطيسي عزمه  $\vec{m}$  وبالتالي يمكننا حساب المجال المغناطيسي عند أية نقطة من هذا العزم.

لنفرض أن العزم المغناطيسي للذرة  $i$  هو  $\vec{m}_i$  وبنفس الطريقة التي اتبعناها في الفصل الرابع لتعريف الاستقطاب  $\vec{P}$ ، فإننا سنقوم بتعريف التمغنط  $\vec{M}$ . وذلك بجمع جميع عزوم الشاقتيبات المغناطيسية الموجودة في عنصر الحجم  $\Delta v$  جمعاً متجهياً، ونقسم الناتج على الحجم  $\Delta v$ ، والنتيجة ستكون عبارة عن الكمية المتجهة  $\vec{M}$ ، والمعروفة بالتمغنط (Magnetization). أي أن:

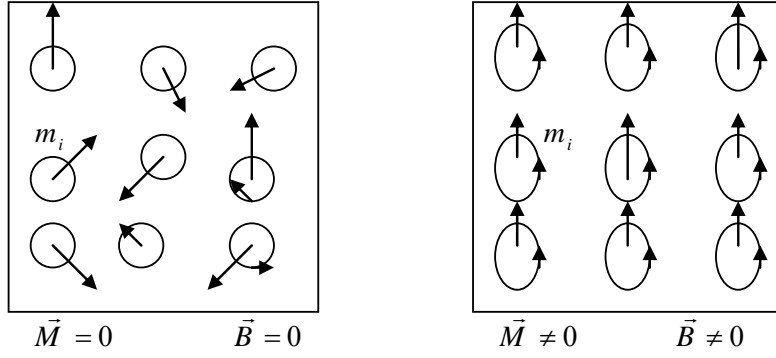
$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta v} \quad (5-1)$$

ومن المفروض أن تكون  $\Delta v$  في المعادلة (5-1)، من النظرة الجاهرية (Macroscopically) صغيرة جداً. أما من النظرة المجهرية (Microscopically) فيجب أن تكون  $\Delta v$  كبيرة بحيث تحتوي على عدد كاف من الشاقتيبات المغناطيسية.

نلاحظ من المعادلة أعلاه أن  $\vec{M}$  تساوي صفراً عندما تكون المادة غير ممغنطة أو بمعنى آخر، أن ثنائي قطبيتها المغناطيسية غير مرتبة (عشوائية)، وبالتالي فإن:

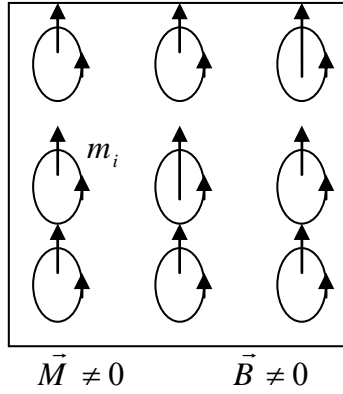
$$\vec{M} = 0 \quad ; \quad \sum_i \vec{m}_i = 0 \quad [\text{المجال المغناطيسي الخارجي = صفراً}]$$

أما إذا أثر مجال مغناطيسي خارجي على المادة، فإنه يـمغنطها، كما في الشكل رقم (5-0). ويعتمد هذا التمغنط  $\vec{M}$  على شدة المجال المغناطيسي الخارجي  $\vec{B}$ . وسنقوم بدراسة العلاقة بين  $\vec{M}$  و  $\vec{B}$  في بند لاحق.



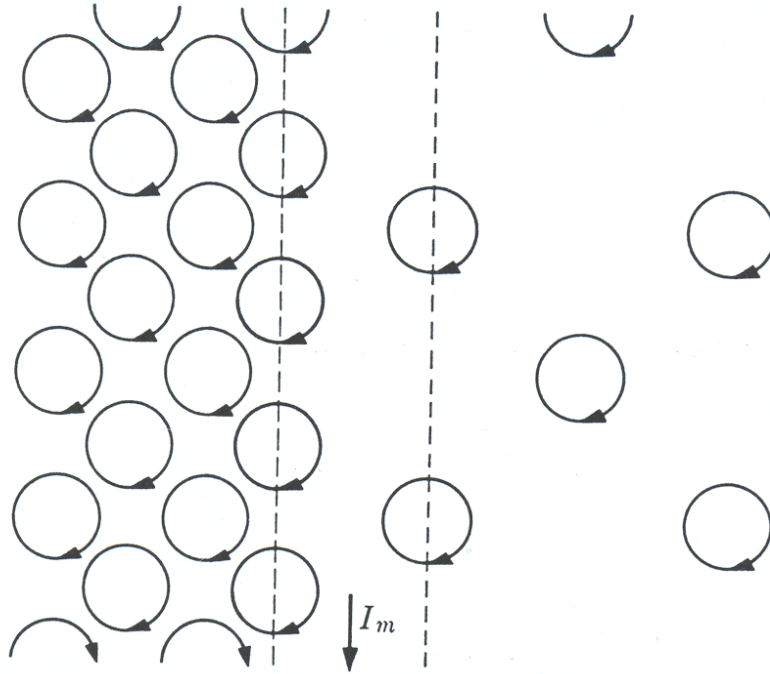
الشكل رقم (١-٥)

لنفرض أن التمغنط  $\vec{M}(x, y, z)$  دالة معلومة في المادة، وبالتالي يمكننا حساب مساهمة المادة الممغنطة في تكوين المجال المغناطيسي  $\vec{B}$ ، كما بينا في الفصل السابق، حيث قمنا بحساب المجال المغناطيسي الناتج عن دائرة كهربائية بعيدة. وقبل أن نشق العلاقة بين كثافة تيار التمغنط  $\vec{J}_m$  (Magnetization Current Density) والتمغنط  $\vec{M}$ . دعنا ننظر إلى نموذج مبسط من مادة ممغنطة. كما لو أنها مكونة من تيارات ذرية تدور بنفس الاتجاه، ومجاورة لبعضها بعضاً، كما في الشكل رقم (٢-٥).



الشكل رقم (٢-٥)

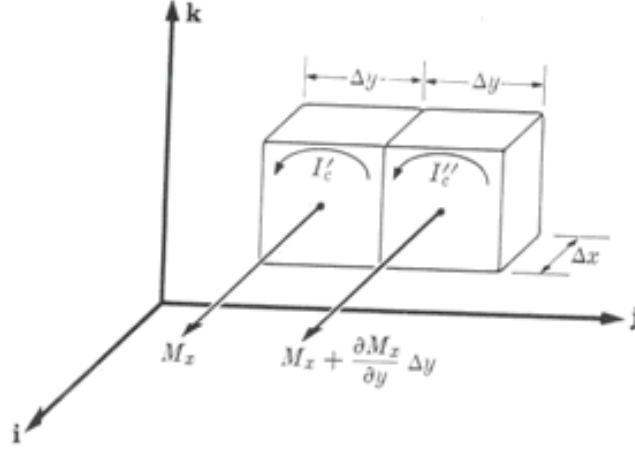
فإذا كان التمغنط منتظماً، فهذا يعني أن كل تيار يحو تأثير التيار المجاور، مما يجعل تأثير التيار في المنطقة الداخلية للمادة يساوي صفراً. أما إذا كان التمغنط غير منتظم لأصبحت عملية إلغاء تأثيرات التيارات الذرية غير كاملة. ولتوضيح هذه الفكرة نأخذ التغير المفاجئ الذي يحصل للتمغنط في الشكل (٣-٥)، فإذا تأملنا المنطقة الواقعة بين الخطين المتقطعين للاحظنا أن كمية الشحنة التي تتحرك نحو الأسفل أكثر من كمية الشحنة المتحركة للأعلى، والمحصلة هي التي تسبب ما يعرف بتيار التمغنط (Magnetization Current)، وتيار التمغنط هذا هو الذي يولد المجال المغناطيسي. ولنشتق الآن العلاقة بين كثافة تيار التمغنط  $\vec{J}_m$  والتمغنط  $\vec{M}$ .



الشكل رقم (٣-٥)



لنأخذ عنصرين حجمين صغيرين متجاورين مثل العنصرين 1 و 2 في الشكل رقم (٤-٥) في قطعة من مادة مغناطيسية حجم كل منها  $\Delta x \Delta y \Delta z$ .



شكل رقم (٤-٥)

فإذا كان التمغنط في العنصر الحجمي الأول هو  $\vec{M}(x, y, z)$  ، فإن التمغنط في العنصر الحجمي الثاني يكون مساوياً:

$$\vec{M}(x, y, z) + \frac{\partial \vec{M}(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \quad (5-2)$$

أما العلاقة بين العزم المغناطيسي  $\vec{m}$  في وحدة الحجم  $\Delta v$  و متجه التمغنط  $\vec{M}$  فهي:

$$\Delta \vec{m} = \vec{M} \Delta v \quad (5-3)$$

ومنها فإن مركبة العزم المغناطيسي باتجاه المحور x للعنصر الحجمي 1 ، تساوي  $M_x \Delta x \Delta y \Delta z$  ويمكن كتابتها بدلالة التيار الدوراني  $I'_c$  ، على النحو التالي:

$$M_x \Delta x \Delta y \Delta z = I'_c \Delta y \Delta z \quad (5-4)$$

حيث استخدمنا العلاقة  $\overline{\Delta m} = I \overline{\Delta A}$  في كتابة العلاقة السابقة.  
وبالمثل، فإن مركبة العزم المغناطيسي باتجاه محور x للعنصر  
الحجمي 2، تساوي:

$$\Delta x \Delta y \Delta z = I''_c \Delta y \Delta z \quad (5-5)$$

$$M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta y +$$

وبإهمال الحدود ذات الرتب العليا من المعادلة (5-5)، نجد أن:

$$\left[ M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x \Delta y \Delta z = I''_c \Delta y \Delta z \quad (5-6)$$

وبطرح المعادلتين (5-4) و (5-6) من بعضهما، نحصل على:

$$I'_c - I''_c = - \frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta y \Delta x \quad (5-7)$$

ومنها، فإن:

$$J_z = \frac{I'_c - I''_c}{\Delta x \Delta y} = - \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (5-8)$$

وتمثل المعادلة السابقة كثافة التيار باتجاه المحور z لعنصري الحجم 1 و 2  
على المحور y.

ونلاحظ من الشكل رقم (5-5) وجود مركبة أخرى لكثافة  
التيار  $J_z$  نتيجة لتغير مركبة التمغنط باتجاه المحور x. فإذا أخذنا  
عنصري حجمين متجاورين واقعين على المحور x، فإن مركبة التمغنط  
تكون باتجاه المحور y، وبالتالي فإن محصلة التيار المتجه نحو الأعلى،  
يساوي:

$$I''_c - I'_c = + \frac{\partial M_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \quad (5-9)$$

ومنها، فإن:

$$J_z = \frac{I''_c - I'_c}{\Delta x \Delta y} = + \frac{\partial M_y}{\partial x} \quad (5-10)$$

بعد أن حصلنا على كثافتين للتيار بالاتجاه المحور  $z$  ، فإن محصلتهما بالاتجاه  $z$  ، تساوي

$$J_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (5-11a)$$

وبالمثل، يمكننا إيجاد التالي:

$$J_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \quad (5-11b)$$

$$J_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \quad (5-11c)$$

لكن المركبات الثلاث السابقة لكثافة التيار  $\vec{J}$  بالاتجاهات  $x$  و  $y$  و  $z$  ، يمكن الحصول عليها من  $\vec{\nabla} \times \vec{M}$  . أي أن:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{M} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_x & M_y & M_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{x} \left[ \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right] + \hat{y} \left[ \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right] + \hat{z} \left[ \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

ونستخلص مما سبق أنه بالإمكان كتابة  $\vec{\nabla} \times \vec{M}$  ، على النحو التالي:

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (5-12)$$

أي أن المعادلة السابقة تشير إلى أن اللف (Curl) للتمغنت  $\vec{M}$  يساوي كثافة تيار التمغنت  $\vec{J}_M$  .

( - )

كرة من مادة مغناطيسية نصف قطرها R، وضعت في نقطة الأصل للإحداثيات، فإذا علمت أن التمغنت  $\vec{M}$  يعطى بالعلاقة:

$$\vec{M} = (a x^2 + b) \hat{i}$$

فجد كثافة تيار التمغنت  $\vec{J}_M$ .

الحل:

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a x^2 + b & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

بيناً في البند (٥-٢) أنه يمكن تمييز كل عنصر حجمي

$\Delta v'$  بعزم مغناطيسي  $\Delta \vec{m}$  بينهما، هي:

$$\Delta \vec{m} = \vec{M}(x', y', z') \Delta v' \quad (5-13)$$

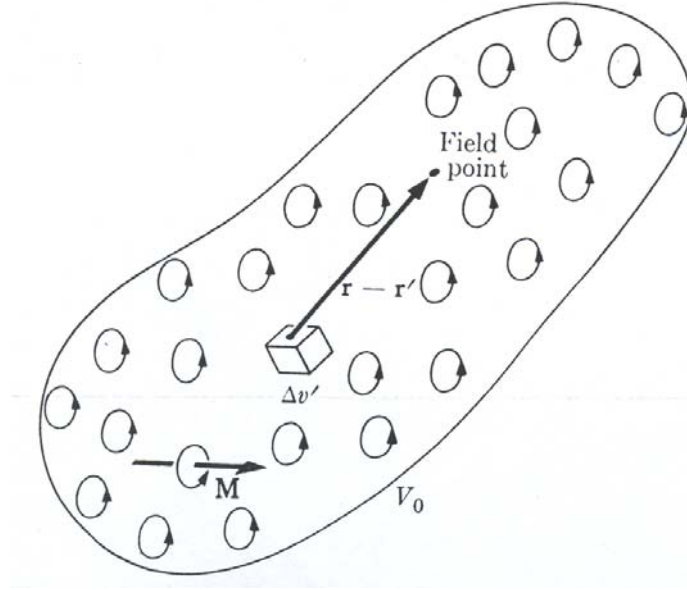
وبدلاً من أن نقوم بحساب المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  مباشرة، سنقوم بحسابه من الجهد المغناطيسي المتجه  $\vec{A}$ ، وذلك بأخذ اللف (Curl) له على النحو

التالي:

يعطى الجهد المغناطيسي المتجه  $\vec{A}(\vec{r}_2)$  لثنائي قطبي مغناطيسي

عزمه  $\vec{m}$ ، بالعلاقة:

$$\vec{A}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}_2}{r_2^3} \quad (5-14)$$



الشكل رقم (0-0)

وبتطبيق المعادلة (5-14) على الشكل رقم (0-0)، والتعويض عن  $\vec{m}$  فيها من المعادلة (5-13)، نجد أن  $\vec{A}$  في نقطة مثل p التي إحداثياتها  $(x, y, z)$ ، تعطى بالعلاقة:

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(x', y', z') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d v' \quad (5-15)$$

وبما أن:

$$\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad [\text{تعني } \nabla' \text{ أن التدرج بالنسبة لـ } \vec{r}']$$

فإن:

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M}(x', y', z') \times \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d v' \quad (5-16)$$

وباستخدام المطابقة التالية:

$$\nabla \times (\phi \vec{F}) = \nabla \phi \times \vec{F} + \phi \nabla \times \vec{F}$$

والتي يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$\vec{F} \times \nabla \phi = \phi \nabla \times \vec{F} - \nabla \times (\phi \vec{F})$$

وبالتالي يمكننا كتابة المعادلة (5-16)، على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \vec{A}(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla' \times \vec{M}(x', y', z') d v' \\ &\quad - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v_0} \frac{\nabla' \times \vec{M}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d v' \quad (5-17) \end{aligned}$$

وباستخدام النظرية التالية:

$$\left[ \int_v \nabla \times \vec{F} d v = \oint_s \hat{n} \times \vec{F} d a \right]$$

السابقة (5-17) من تكامل حتمي إلى تكامل سطحي، وذلك على النحو التالي:

$$- \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v_0} \frac{\nabla' \times \vec{M} d v'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \oint_{s_0} \hat{n} \times \frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d a' = \oint_{s_0} \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d a'$$

وبتعويض النتيجة السابقة، في المعادلة (5-17)، نحصل على:

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_{v_0} \frac{\nabla' \times \vec{M}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d v' + \oint_{s_0} \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d a' \right] \quad (5-18)$$

لنعرف الآن الكمية  $\vec{J}_M$  بأنها كثافة تيار التمغنط السطحي، والتي تساوي:

$$\vec{J}_M = \vec{M} \times \hat{n} \quad (5-19)$$

وتعني الكمية  $\vec{J}_M$  تيار التمغنط الذي ينساب في الطبقة السطحية للمادة الممغنطة لكل وحدة طول، وليس لكل وحدة مساحة كما اعتدنا تعريف

كثافات التيارات. وبالتعويض عن  $\vec{M} \times \hat{n}$  في المعادلة (5-18) من المعادلة (5-19)، و عن  $\vec{\nabla}' \times \vec{M}$  من المعادلة (5-12) على ما يلي:

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{J}_M(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_0} \frac{\vec{J}_M(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da' \quad (5-20)$$

ونلاحظ من هيئة المعادلة السابقة أنها ليست غريبة علينا. فالجهد المغناطيسي المتجه  $\vec{A}$  الناتج عن توزيعات للتيارات الذرية داخل المادة الممغنطة له نفس هيئة الجهد المغناطيسي المتجه الناتج عن تيارات حقيقية (انتقالية)، وكذلك نفس هيئة الجهد الكهروستاتيكي لتوزيعات مختلفة من الشحنات. كما نلاحظ أن تعريف  $\vec{J}_M$  في المعادلة (5-20) منسجماً مع  $\vec{J}_M$ . فالأولى  $(\vec{J}_M)$  تُعبر عن تيار لكل وحدة طول بينما الثانية  $(\vec{J}_M)$  تُعبر عن تيار لكل وحدة مساحة. وهكذا نجد بالإمكان الآن حساب المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  من الجهد المغناطيسي المتجه  $\vec{A}$ ، وذلك باستخدام العلاقة  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . لكن العلاقة (5-18) سهلة، وخصوصاً أننا نحتاج لإيجاد  $\vec{\nabla} \times \vec{M}$  أولاً، ومن ثم نجد  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  ليتسنى لنا الحصول على  $\vec{B}$  لتوزيع معين من التماثل. وبالتأكيد في هذه الحالات يكون من الأفضل التعامل مع كميات عددية بدلاً من كميات متجهة وذلك إذا كان ممكناً، وهذا ما سنقوم به فيما يأتي:

معلوم لدينا أن:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$$

ولكن:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \times \left[ \vec{M} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] d v' \quad (5-21)$$

وباستخدام المتطابقة التالية:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) \vec{F} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G}$$

فإن:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left[ \vec{M} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] &= \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \vec{M} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{M}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &+ \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{M} - (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

وحيث إن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$$

وكذلك

$$\left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{M} = 0$$

فإن:

$$\vec{\nabla} \times \left[ \vec{M} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \vec{M} - (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

وبالتعويض عن المقدار السابق في المعادلة (5-21) نحصل على:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v_0} \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \vec{M} d v' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v_0} \left( (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d v'$$



$$= \bar{B}_I(\bar{r}) + \bar{B}_{II}(\bar{r})$$

أي أن:

$$\bar{B}_I(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v_0} \left( \bar{\nabla} \cdot \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \right) \bar{M} d v' \quad (5-22)$$

$$\bar{B}_{II}(\bar{r}) = \frac{-\mu_0}{4\pi} \int_{v_0} \left( (\bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \right) d v' \quad (5-23)$$

ولنجد الآن التكامل الأول المعادلة (5-22)

بما أن:

$$\bar{\nabla} \cdot \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = 4\pi \delta(\bar{r} - \bar{r}')$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{B}_I(\bar{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v_0} 4\pi \delta(\bar{r} - \bar{r}') \bar{M}(\bar{r}') d v' \\ &= \mu_0 \bar{M}(\bar{r}') \int \delta(\bar{r} - \bar{r}') d v' = \mu_0 \bar{M}(\bar{r}) \times 1 \end{aligned}$$

ومنها فإن:

$$\bar{B}_I(\bar{r}) = \mu_0 \bar{M}(\bar{r}) \quad (5-24)$$

أما التكامل الثاني (المعادلة (5-23)) فيمكن تبسيطه باستخدام المتطابقة

التالية:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot (\bar{F} \cdot \bar{G}) &= (\bar{F} \cdot \bar{\nabla}) \bar{G} + \bar{F} \times (\bar{\nabla} \times \bar{G}) \\ &+ (\bar{G} \cdot \bar{\nabla}) \bar{F} + \bar{G} \times (\bar{\nabla} \times \bar{F}) \end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$\bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{M} \cdot \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \right] = (\bar{M} \cdot \bar{\nabla}) \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} + \bar{M} \times \left( \bar{\nabla} \times \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \right)$$

$$+ \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{M} + \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M})$$

ولكن:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0$$

$$\left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{M} = 0$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M}) = 0$$

$$\therefore \vec{\nabla} \left[ \vec{M} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

وبالتعويض عن الحد الأيمن من العلاقة السابقة في المعادلة (5-23)، نحصل

على:

$$\vec{B}_{II}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v_0} \vec{\nabla} \left[ \vec{M} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] d v'$$

$$= -\mu_0 \vec{\nabla} \left[ \frac{1}{4\pi} \int_{v_0} \vec{M} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d v' \right]$$

$$\therefore \vec{B}_{II}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla}^* \phi(\vec{r})$$

حيث إن:

$$\phi^* (\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{v_0} \vec{M}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d v' \quad (5-25)$$

وتمثل المعادلة (5-25) مجالاً عددياً يعرف بالجهد المغناطيسي العددي ناشئ عن المادة المغناطيسية.

وهكذا نجد أن المجال المغناطيسي المحصل  $\vec{B}(\vec{r})$  الناشئ عن المادة الممغنطة يساوي:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) - \mu_0 \nabla \phi^* (\vec{r}) \quad (5-26)$$

ونلاحظ من المعادلة (5-26) أن المجال المغناطيسي المحصل ناشئ عن حدين: الأول يُمثل بالتمغنط والثاني يُمثل بتدرج الجهد. وفي حالة إيجاد المجال المغناطيسي خارج المادة الممغنطة (أي في الفراغ)، فإن التمرغنط يساوي صفراً، وبالتالي يعطي المجال بالعلاقة:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \nabla \phi^* (\vec{r}) \quad (5-27)$$

وبالتعويض عن  $\phi^*$  فإن المعادلة (5-27) تصبح على النحو التالي:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \nabla \left[ \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \right] \quad (5-28)$$

بينما في البند (5-3) أن الجهد المغناطيسي العددي لمادة ممغنطة،

يعطى بالعلاقة:

$$\phi^* (\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{v_0} \vec{M}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d v'$$

وهذه المعادلة يمكن تحويلها لشكل يشبه تماماً الجهد الكهروستاتيكي الناتج عن مادة مستقطبة والذي يعطى بالعلاقة:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_p d v'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{s_0} \frac{\rho_p d a'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

ويمكننا تحويل المعادلة (5-15)، على النحو التالي:

$$\vec{M} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{M} \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

ولكن حسب المتطابقة  $\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{F}) = (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{F} + \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  ، فإن:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \vec{\nabla}' \cdot \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{M} \right) \\ &= \vec{\nabla}' \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \vec{M} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{M} \end{aligned}$$

ومنها فإن:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}' \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \vec{M} &= \vec{M} \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{M} \\ \therefore \vec{M} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} &= \vec{M} \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{M} \end{aligned}$$

وبالتعويض عن النتيجة السابقة في المعادلة (5-25)، فإن تلك المعادلة يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$\phi^*(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{M} \, dV'$$

وبتطبيق نظرية التفريق (Divergence Theorem) على التكامل الحجمي الأول في المعادلة السابقة لتحويله إلى تكامل سطحي، فإننا نحصل على:

$$\phi^*(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\vec{M} \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dA' - \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dV' \quad (5-29)$$

حيث تمثل  $S_0$  السطح المحيط بالمنطقة  $V_0$ .

ومن فصول سابقة، حيث قمنا بتعريف الكميتين العدديتين

التاليتين:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (\text{كثافة شحنة الاستقطاب السطحية})$$

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (\text{كثافة شحنة الاستقطاب الحجمية})$$

نُعرفُ كميتين جديدتين هما، على النحو التالي:

$$\rho_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad (\text{الكثافة الحجمية للقطب المغناطيسي})$$

$$\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n} \quad (\text{الكثافة السطحية للقطب المغناطيسي})$$

وتؤدي الكميتان السابقتان في المغناطيسية نفس الدور الذي تؤديه الكميتان  $\rho_p, \sigma_p$  في العازلات الكهربائية. لنأخذ على سبيل المثال، كتطبيق على  $\rho_M, \sigma_M$ ، قضيباً مغنطيسياً منتظماً التمغنط. ولما كان التمغنط منتظماً، فإن كثافة القطب الحجمية تتلاشى.

أي أن:

$$\rho_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$$

أما كثافة القطب السطحية فهي تتلاشى فقط على السطوح الموازية للتمغنت  $\vec{M}$ . أما السطوح العمودية على التمغنت فهي لا تتلاشى. ويُدعى هذان السطحان بأقطاب المغناطيس.

ولنتذكر كيف أثبتنا في فصول سابقة، أن:

$$\text{العازل متعادل كهربائياً} \quad \oint_{s_0} \vec{P} \cdot \hat{n} \, d a' + \int_{v_0} -\text{div } \vec{P} \, d v' = 0 \quad (\text{شحنة})$$

الاستقطاب)  $q_p$

فإنه يمكن إثبات أن شدة القطب الكلية لمغناطيس يساوي صفراً أيضاً. أي أن:

$$\text{شدة القطب الكلية} = \oint_{s_0} \vec{M} \cdot \hat{n} \, d a' + \int_{v_0} -\text{div } \vec{M} \, d v' = 0$$

وبالتعويض في المعادلة (5-29) عن  $\vec{M} \cdot \hat{n}$  و  $\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}$  بالكميتين الجديدتين وهما  $\rho_M$  ،  $\sigma_M$  ، على الترتيب، فإن تلك المعادلة تأخذ الشكل التالي:

$$\phi^*(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{s_0} \frac{\sigma_M \, d a'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{v_0} \frac{\rho_M \, d v'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5-30)$$

وبما أن:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla}^* \phi^*(\vec{r}) + \mu_0 \vec{M}(\vec{r})$$

فإنه بالإمكان الحصول على المجال المغناطيسي  $\vec{B}(\vec{r})$  داخل المادة الممغنة وذلك بالتعويض عن  $\vec{\nabla}^* \phi^*$  في العلاقة السابقة بعد أخذ تدرج  $(\vec{\nabla})$  الجهد للمعادلة (5-30)، ويتم ذلك على النحو التالي:

$$\vec{\nabla}^* \phi^*(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{s_0} \frac{\sigma_M \, d a' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{1}{4\pi} \int_{v_0} \frac{\rho_M \, d v' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

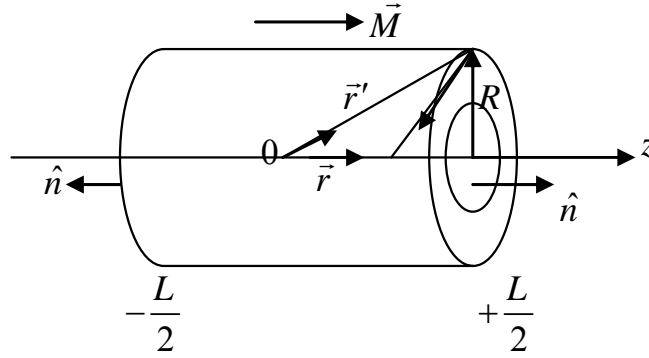
$$\therefore \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d a' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d v' + \mu_0 \vec{M}(\vec{r}') \quad \text{.....(5-31)}$$

والمعادلة (5-31) تمكننا من حساب المجال المغناطيسي لمادة ممغنطة في نقطة تقع داخله، أما عند حساب المجال المغناطيسي في نقطة خارج المادة الممغنطة فإن الحد الأخير في تلك المعادلة  $[\mu_0 \vec{M}(\vec{r}')] ]$  يتلاشى كما سنبين من خلال المثال التالي:

( - )

مغناطيس دائمي على شكل أسطواني طوله  $L$  ونصف قطره  $R$ ، وضع بحيث ينطبق محوره مع الإحداثي  $z$ ، وبحيث ينطبق مركزه مع نقطة الأصل كما في الشكل رقم (٥-٦). فإذا كان التمكنظ منتظماً ومقداره  $|\vec{M}|$  باتجاه المحور  $z$ .

(a) أوجد  $\phi^*(z)$  عند جميع نقاط محور التماثل داخل المغناطيس وخارجه.  
(b) استخدم نتيجة الفرع السابق لإيجاد المجال المغناطيسي  $B_z$  عند جميع نقاط محور التماثل داخل المغناطيس وخارجه.



الشكل رقم (٥-٦)

الحل:

(a) - بما أن  $\vec{M}$  منتظمة وباتجاه المحور z فإن:

$$\rho_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$$

وكذلك:

$$\rho_M \text{ (على السطح المستدير) } = 0$$

$$\rho_M \text{ (على السطح الأيمن) } = \vec{M} \cdot \hat{n} = +M$$

$$\rho_M \text{ (على السطح الأيسر) } = \vec{M} \cdot \hat{n} = -M$$

بتطبيق المعادلة (5-30) على هذا المثال وبالاتعانة بالشكل رقم (5-6)،

نجد أن:

$$\begin{aligned} \phi^*(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{s_0} \frac{\sigma_M da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{v_0} \frac{\rho_M dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_0} \frac{\sigma_M da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{s_1} \frac{M da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{s_2} \frac{-M da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

حيث  $S_1$ : السطح الأيمن و  $S_2$ : السطح الأيسر.وبالتعويض في المعادلة السابقة عن  $da'$  و  $|\vec{r} - \vec{r}'|$ ، نجد أن:

$$\begin{aligned} \phi_p^*(z) &= \frac{M}{4\pi} \int_0^R \frac{2\pi y dy}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{L}{2} - z\right)^2}} - \frac{M}{4\pi} \int_0^R \frac{2\pi y dy}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{L}{2} + z\right)^2}} \\ &= \frac{M}{2} \left[ \int_0^R \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{L}{2} - z\right)^2}} - \int_0^R \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{L}{2} + z\right)^2}} \right] \\ &= \frac{M}{2} \left[ \sqrt{y^2 + \left(\frac{L}{2} - z\right)^2} \Big|_0^R - \sqrt{y^2 + \left(\frac{L}{2} + z\right)^2} \Big|_0^R \right] \end{aligned}$$



$$\phi_p^*(z) = \frac{M}{2} \left[ \sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} - z\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} + z\right)^2} + 2z \right]$$

أما الجهد المغناطيسي  $\phi^*(z)$  خارج المغناطيس، فيمكن إيجاده على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \phi^*(z) &= \frac{M}{2} \left[ \int_0^R \frac{y \, dy}{\sqrt{y^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} - \int_0^R \frac{y \, dy}{\sqrt{y^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} \right] \\ &= \frac{M}{2} \left[ \sqrt{y^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2} \Big|_0^R - \sqrt{y^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2} \Big|_0^R \right] \end{aligned}$$

(الجهد خارج المغناطيس)

$$\therefore \phi_p^*(z) = \frac{M}{2} \left[ \sqrt{R^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2} + 2z \right]$$

(b) بتطبيق المعادلة (5-26)، فإن المجال المغناطيسي داخل المغناطيس

يمكن إيجاده على النحو التالي:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla} \phi^*(\vec{r}) + \mu_0 \vec{M}(\vec{r})$$

$$\therefore B(z) = -\mu_0 \frac{\partial \phi^*}{\partial z} + \mu_0 M$$

$$= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{M}{2} \left( \sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} - z\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} + z\right)^2} + 2z \right) \right] + \mu_0 M$$

$$= \frac{\mu_0 M}{2} \left[ \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} - z\right)^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} + z\right)^2}} - 2 \right] + \mu_0 M$$

المجال داخل المغناطيس على المحور

$$\therefore B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[ \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} - z\right)^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} + z\right)^2}} \right]$$

أما المجال خارج المغناطيس، فيمكن إيجاده على النحو التالي: لاحظ  
أن  $\vec{M} = 0$  في الخارج

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla} \phi^*(\vec{r}) + \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla} \phi^*(\vec{r})$$

$$\therefore B(z) = -\mu_0 \frac{\partial \phi^*}{\partial z}$$

$$= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{M}{2} \left( \sqrt{R^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2} + 2z \right) \right]$$

$$= -\mu_0 \frac{M}{2} \left[ \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} + 2 \right]$$

المجال خارج المغناطيس على المحور

$$\therefore B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[ \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} + \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} - 2 \right]$$

:

$$(\overline{H})$$

هناك نوعان من المصادر المغناطيسية كما بينا في مقدمة هذا الفصل. فالأول ينشأ عن التيارات الكهربائية الحقيقية. والنوع الثاني ينشأ عن التيارات الذرية داخل المادة. وتجدر الإشارة إلى أنه تحت ظروف معينة قد تولد مادة معينة، كالحديد مثلاً، النوعين السابقين من المجالات المغناطيسية وذلك لكونها ممغنطة ومرور تيار كهربائي خلالها. ويمكننا كتابة معادلة عامة تعبر عن المجال المغناطيسي الناشئ عن جميع المصادر، وذلك على النحو التالي:

$$\overline{B}(\overline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\overline{J} \times (\overline{r} - \overline{r}')}{|\overline{r} - \overline{r}'|^3} dv - \mu_0 \nabla \cdot \phi^*(\overline{r}) + \mu_0 \overline{M}(\overline{r}) \quad (5-32)$$

حيث يُمثل الحد الأول في المعادلة (5-32) المجال المغناطيسي الناتج عن كثافة  $\overline{J}$  تيار عندما يمر تيار كهربائي حقيقي في وسط معين، وهو يمثل كذلك طريقة حساب المجال المغناطيسي لتيار حقيقي بواسطة قانون بيوت وسافارت. أما الحد الثاني فيمثل المجال المغناطيسي الناتج عن كثافتي القطب السطحية  $\sigma_M$  والحجمية  $\rho_M$  المحصورتين في السطح  $S$  والحجم  $V$  على الترتيب. حيث إن  $\phi^*(\overline{r})$  في هذا الحد يعطى بالعلاقة:

$$\phi^*(\overline{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma_M da'}{|\overline{r} - \overline{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_M dv'}{|\overline{r} - \overline{r}'|} \quad (5-33)$$

وأما الحد الثاني في المعادلة (5-32) فيمثل المجال المغناطيسي الناتج عن تأثير التيارات الذرية والمتمثلة بمتجه التمغنط  $\overline{M}$ .

ويمكن حل المعادلة (5-32) لإيجاد المجال المغناطيسي  $\vec{B}(\vec{r})$  ، وذلك إذا حددت قيمتي  $\vec{J}$  و  $\vec{M}$  عند جميع النقاط. ولكن يمكن تحديد  $\vec{J}$  في معظم المسائل إلا أنه من الصعب تحديد  $\vec{M}$  وذلك لأنها تعتمد على  $\vec{B}$  . وللتغلب على مثل هذه المشكلة فإننا سندخل كمية فيزيائية جديدة تدعى بالشدة المغناطيسية (Magnetic Intensity) ويرمز لها بالرمز  $\vec{H}$  وتشتمل على الكميتين  $\vec{M}$  و  $\vec{B}$  ، وتعرف على النحو التالي:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (5-34)$$

ومن المعادلتين (5-32) و (5-34) ، نحصل على:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' - \nabla \cdot \phi^*(\vec{r}) \quad (5-35)$$

وتمثل المعادلة (5-35) الشدة المغناطيسية  $\vec{H}$  ، ونلاحظ منها أننا لم نتخلص كلياً من الاعتماد على  $\vec{M}$  ، حيث مازالت  $\rho_M$  و  $\sigma_M$  اللازمتين لحساب  $\phi^*$  (انظر المعادلة (5-33)) تعتمدان على  $\vec{M}$   $[\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n} , \rho_M = \nabla \cdot \vec{M}]$  . إلا أن المتجه  $\vec{H}$  يؤدي دوراً هاماً في موضوع النظرية الكهرومغناطيسية وبالأخص في المسائل التي تتضمن مغناط دائمية. وتجدر الإشارة هنا قبل الانتهاء من هذا الموضوع أن وحدات  $\vec{H}$  شبيهة بوحدات  $\vec{M}$  (انظر المعادلة (5-34)).

أي أنها  $\frac{A}{m}$  .

لقد بينا في الفصل السابق أن:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} , \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

لكن المعادلتين السابقتين تصفان تأثير التيارات الكهربائية الحقيقية، ولم تتضمننا مساهمة المادة المغنطة. وسنقوم فيما يلي على بتعديل المعادلتين السابقتين لتشملنا على مساهمة المواد المغنطة في تكوين المجال المغناطيسي  $\vec{B}$ .

لقد كتبنا العلاقة  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  في الفصل السابق على أساس إمكانية كتابة  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  ولكن هذه النتيجة ليست مصورة على المجالات  $\vec{B}$  الناتجة عن التيارات الكهربائية الحقيقية، بل يمكن اشتقاقها أيضاً للمواد المغنطة. وبهذا يمكننا دائماً كتابة  $\vec{B}$ ، على النحو التالي:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

ولقد بينا أن اللف (Curl) للمجال المغناطيسي، يعطى بالعلاقة:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة لتشمل على جميع أنواع التيارات التي يمكنها إنتاج مجالات مغناطيسية كتيار التمغنط مثلاً، وذلك على النحو التالي:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M)$$

حيث  $\vec{J}$ : كثافة التيار الكهربائي الحقيقي و  $\vec{J}_M$ : كثافة تيار التمغنط.

وبالتعويض عن  $\vec{J}_M$  في المعادلة السابقة بما يساويها من المعادلة

$$\text{التالية: } \vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \text{ فإننا نحصل على:}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

ومنها فإن:

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$$

وبما أن:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (5-36)$$

ونلاحظ من المعادلة (5-36) أن الشدة المغناطيسية ( $\vec{H}$ ) ترتبط بكثافة التيار الحقيقي  $\vec{J}$  من خلال اللف ( $\vec{\nabla} \times$ ) له. ويمكن تحويل المعادلة (5-36) لتأخذ شكلاً آخر على النحو التالي:

يمكن تحويل التكامل السطحي للمتجه  $\vec{H}$  ، بعد أخذ التكامل السطحي لطرفي المعادلة (5-36) إلى تكامل خطي باستخدام نظرية ستوكس التالية:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} \, da = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \quad [\text{نظرية ستوكس}]$$

$$\therefore \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} \, da = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, da = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$$

وبما أن:

$$\oint_C \vec{J} \cdot \hat{n} \, da = I$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I \quad (5-37)$$

وتُعرف المعادلة (5-37) بقانون أمبير للدارات الكهربائية (Ampere's Circuital Law).

وتشير المعادلة (5-37) إلى أن التكامل الخطي للمركبة المماسية للشدة المغناطيسية  $\vec{H}$  حول مسار مغلق  $C$  يساوي التيار الكلي  $I$  الذي ينتقل خلال المساحة  $S$  المحاطة بالمنحنى  $C$ .

وباستخدام نظرية التفرق (Divergence Theorem) التالية:

$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{v} = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da$$

وحيث إن

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \therefore \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da &= 0 \end{aligned}$$

أي أن التدفق المغناطيسي الناتج من تيارات حقيقية ومواد ممغنطة من أي سطح مغلق يجب أن تساوي صفرًا دائمًا.

( - )

أوجد كثافة التيار  $\vec{J}$  اللازمة لتوليد المجال المغناطيسي التالي:

$$\vec{B} = \hat{x} y^3$$

**الحل:**

معلوم لدينا أن:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\therefore \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} [0 - 3y^2 \hat{z}] = \frac{-3y^2 \hat{z}}{\mu_0}$$

-

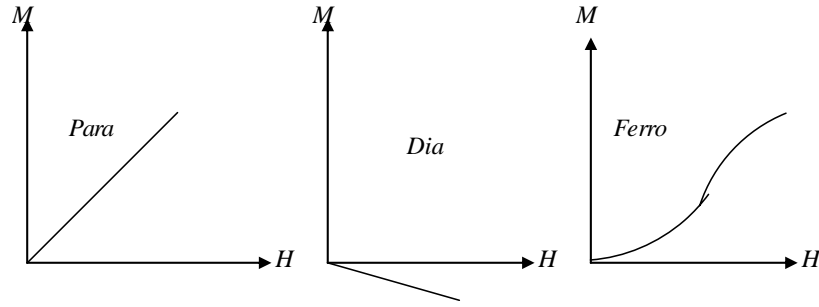
لكي نستطيع حل بعض المسائل في النظرية المغناطيسية، لا بد من توافر علاقة بين أيدينا تربط بين  $\vec{H}$  و  $\vec{B}$ ، أو علاقة مكافئة تربط بين  $\vec{M}$  و  $\vec{B}$  أو  $\vec{M}$  و  $\vec{H}$ .

ولحسن الحظ، فإن العلاقة بين  $\vec{H}$  و  $\vec{M}$  خطية تقريباً لعدد كبير من المواد المغناطيسية (مثل المواد البارامغناطيسية والديامغناطيسية). فإذا كانت المادة خطية (linear)، وسوية الخواص في جميع الاتجاهات (Isotropic)، أمكننا كتابة العلاقة بين  $\vec{M}$  و  $\vec{H}$  على النحو التالي:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (5-38) \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \chi \vec{E} \quad \text{تكافئ}$$

حيث إن:  $\chi_m$ : قابلية التمكنط (Magnetic Susceptibility)، وهي كمية عددية، ولا أبعاد لها. فإذا كانت  $\chi_m$  موجبة (أي أن  $\chi_m > 0$ ) دُعيت المادة باسم بارامغناطيسية Paramagnetic، (para: تعني بنفس الاتجاه) كالألومنيوم والتنجستن والزنك، وهي مواد قابلة للمغنطة. ووجودها في مجال مغناطيسي خارجي يؤدي إلى زيادة في شدته ويبين الشكل رقم (5-0) (7) علاقة  $\vec{H}$  مع  $\vec{M}$ ، وهو ما يعرف بمنحنى التمكنط (Magnetization Curve).





الشكل رقم (٧-٥)

أما إذا كانت  $\chi_m$  سالبة (أي أن  $\chi_m < 0$ ) دُعيت المادة باسم ديامغناطيسية (Diamagnetic، : dia: تعني ضد) كالزئبق، وهي مواد غير قابلة للمغطة ووجودها في مجال مغناطيسي يؤدي إلى إضعاف شدته. ويبين الشكل (٧-٥) علاقة  $\vec{H}$  مع  $\vec{M}$ . وتجدر الإشارة هنا إلى أن  $\chi_m$  تعتمد على درجة حرارة المادة وتتغير أحياناً بشكل مفاجئ مع تغير درجات الحرارة. أما قيمة  $\chi_m$  للمواد البارامغناطيسية والديامغناطيسية فهي بصورة عامة صغيرة جداً. أي أن:

$$|\chi_m| \ll 1 \quad \text{[للمواد البارامغناطيسية والمواد الديامغناطيسية]}$$

ولا تعطي معظم المراجع المتخصصة قيمة مباشرة لقابلية التمغنط  $\chi_m$ ، ولكن تعطي قيمة لقابلية التمغنط الكتلية (mass suscept.  $\chi_{m,mas}$ )، أو قيمة لقابلية التمغنط الجزيئية (molar:  $\chi_{m,molar}$ ) وتُعرف هاتين القيمتين على النحو التالي:

$$\left. \begin{aligned} \chi_m &= \chi_{m, mass} d \\ \chi_m &= \chi_{m, molar} \frac{d}{A} \end{aligned} \right\} \quad (3-39)$$

حيث تمثل d: الكثافة الكتلية للمادة و A: الوزن الجزيئي لها.

أما جدول رقم (1) فيبين قيم  $\chi_m$  لعدد من المواد البارامغناطيسية والمواد الديامغناطيسية المعروفة.

جدول رقم (1)

المادة	$\chi_m$
Aluminum ألمنيوم	$+ 2.1 \times 10^{-5}$
Titanium تيتانيوم	$+ 18.0 \times 10^{-5}$
Air الهواء	$+ 0.03 \times 10^{-5}$
Vacuum الفراغ	0
Bismuth البيزموت	$- 1.6 \times 10^{-5}$
Copper النحاس	$- 0.98 \times 10^{-5}$
Silver الفضة	$- 2.4 \times 10^{-5}$
Mercury الزئبق	$- 2.8 \times 10^{-5}$
Water الماء	$- 0.88 \times 10^{-5}$

تدل العلاقة الخطية (5-38)، بين الكميتين  $\vec{M}$  و  $\vec{H}$  ، على أن العلاقة بين  $\vec{B}$  و  $\vec{H}$  خطية أيضاً. وفيما يلي الإثبات:  
من المعادلة (5-34):

$$\vec{B} = \mu_0 ( \vec{H} + \vec{M} )$$

ولكن:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \chi_m \vec{H} \\ \therefore \vec{B} &= \mu_0 ( \vec{H} + \chi_m \vec{H} ) \\ \vec{B} &= \mu_0 ( 1 + \chi_m ) \vec{H} \end{aligned}$$

أي أن:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5-40)$$

حيث أن:

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (5-41)$$

وتُعرف  $\mu$  بثابت إنفاذية الوسط للمجال المغناطيسي (Magnetic Permeability). وهناك كمية لا أبعاد لها تعرف بثابت الإنفاذية النسبية  $K_m$  (Relative Permeability)، وتُعرف من المعادلة التالية:

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad (5-42)$$

وبما أن  $|\chi_m|$  للمواد البارامغناطيسية وللمواد الديامغناطيسية تقل كثيراً عن 1 (انظر جدول رقم (1)) فإن قيمة  $K_m$  يجب أن تكون قريبة جداً من قيمة 1.

أما الصنف الأخير من المواد المغناطيسية فتعرف بالمواد الفرومغناطيسية أو عالية الإنفاذية المغناطيسية أو المواد الحديدية (Ferro ، Ferromagnetic: تعني حديدي) لأن الحديد أشهرها. وتتميز هذه المواد بقدرتها العالية على اكتساب تمغنط دائم، وتصل قيمة ثابت الإنفاذية النسبية  $K_m$  لها إلى حوالي  $1.5 \times 10^5$ ، كما أنها لا تستجيب للمجال المغناطيسي الخارجي بشكل خطي. أي لا يصح تطبيق المعادلتين (5-38) و (5-40) التاليتين عليها لأن  $\chi_m$  و  $\mu$  غير ثابتتين:

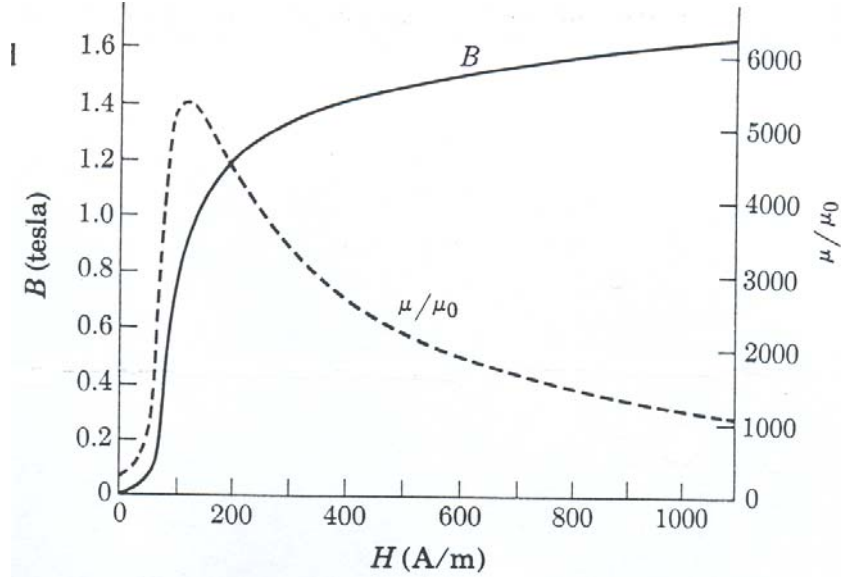
$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

إلا أنه من الممكن استخدام المعادلة (5-40)، لتعريف الإنفاذية  $\mu$  حيث

$$\mu = \mu(\vec{H})$$

لننظر الآن ما يحدث لمادة فرومغناطيسية غير ممغنطة عند تعرضها لمجال مغناطيسي خارجي  $\vec{B}$ .

عند زيادة الشدة المغناطيسية  $\vec{H}$  ابتداءً من الصفر، فإن  $\vec{B}$  تزداد معها. ونحصل على منحنى شبيه بالمبين في الشكل رقم (٨-٥) وهو ما يُعرف أيضاً بمنحنى التمهبط للمادة (Magnetic Curve).



الشكل رقم (٨-٥)

وللحصول على قيم  $\mu$  (انظر المعادلة (40-5)) نقسم قيمة B على H عند كل نقطة من نقاط المنحنى B، ومن ثم نقسم قيمة  $\mu$  على  $\mu_0$  فنحصل على ثابت الإنفاذية المغناطيسية  $K_m$  (أو  $\frac{\mu}{\mu_0}$ ) (يرمز لها أحياناً بالرمز  $\mu_r$ ) حيث قيمها جميعاً موجبة. ونلاحظ من الشكل رقم (٨-٥) أن قيمة  $\vec{B}$  تزداد بشدة في البداية مع زيادة قيمة  $\vec{H}$ . وتأخذ  $\mu$  قيمة قصوى عند نقطة معينة تسمى ركبة المنحنى (Knee of the curve)، وقد

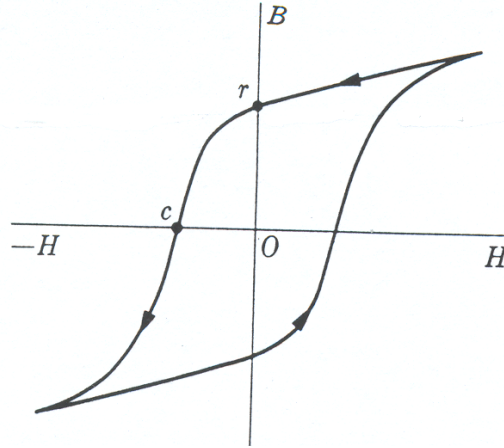
تصل قيمة  $\mu$  لبعض المواد الفرومغناطيسية إلى حوالي  $10^5 \mu_0$ . ويعزى سبب وجود هذه الركبة (الذروة) في المنحنى إلى أن التمغنط في المادة ( $\vec{M}$ ) يصل إلى قيمته القصوى. حيث إن:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

فإذا وصلت  $\vec{M}$  إلى قيمتها القصوى في المعادلة السابقة، فإن أية زيادة في  $\vec{B}$  تكون بسبب الزيادة في  $\vec{H}$  فقط. وتدعى القيمة القصوى لهذا التمغنط، بتمغنط الإشباع للمادة (Saturation Magnetization).

لنأخذ الآن عينة فرومغناطيسية ممغنطة بالطريقة المذكورة أعلاه. فإذا نقصت شدة المغناطيسية  $\vec{H}$ ، لوجدنا أن العلاقة بين  $B$  و  $H$  لن تتبع المسار المبين في الشكل رقم (٨-٥)، إنما تتبع مساراً جديداً مثل المسار 1 على الشكل رقم (٩-٥) ونلاحظ من المنحنى 1 أنه عندما:

$$\vec{M} = 0 \quad \text{فإن} \quad \vec{B} \neq 0$$



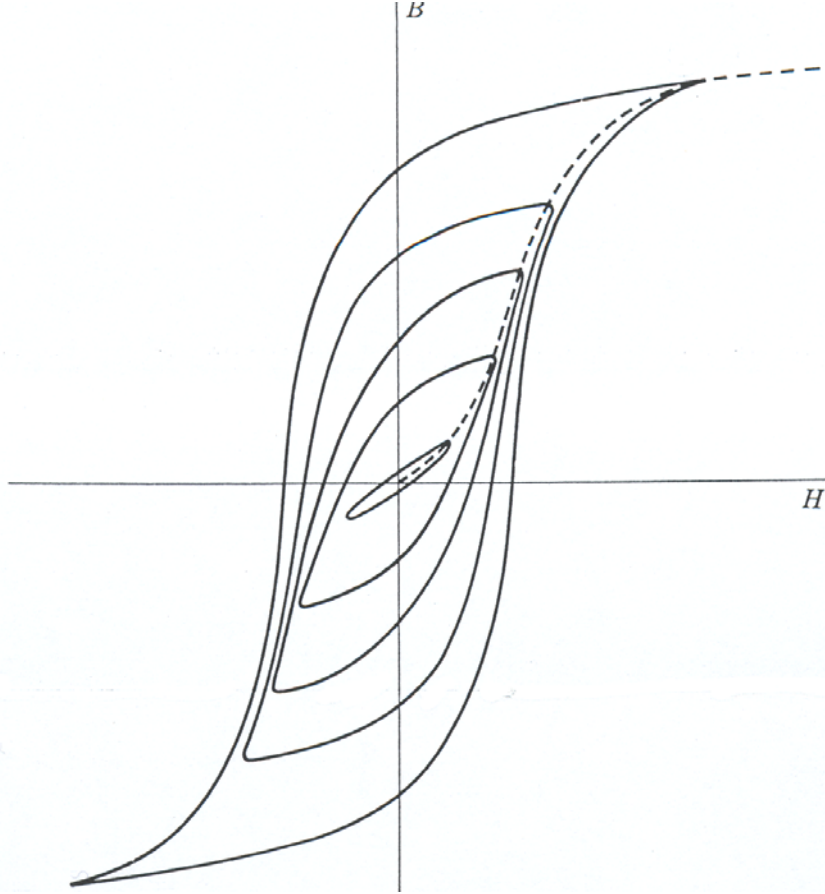
الشكل رقم (٩-٥)

أي أن التمغنط  $\vec{M}$ ، حسب المعادلة (5-34)، لم يختفِ بإزالة المجال الممغنط  $\vec{H}$ . وإزالة التمغنط كلياً، نحتاج إلى تسليط قدر معين

من شدة المجال المغنط  $\vec{H}$  بالاتجاه المعاكس، وذلك للوصول إلى النقطة C على الشكل رقم (5-9) إذا استمرت  $\vec{H}$  بالزيادة بالاتجاه المعاكس فإن العينة الفرومغناطيسية تكتسب تمغنطاً  $\vec{M}$  بالاتجاه المعاكس ليصل إلى النقطة p مثلاً. وأخيراً إذا نقصت قيمة  $\vec{H}$  المؤثرة في الاتجاه المعاكس لرأينا أن العينة تتبع المسار 2. ونلاحظ من الشكل رقم (5-9) أن تأثير زيادة  $\vec{H}$  على  $\vec{B}$  يختلف عن نقصانها وتدعى هذه الظاهرة بالتخلف المغناطيسي (Hysteresis). ويدعى المنحنى المبين في الشكل رقم (5-9) بدوره التخلف المغناطيسي للمادة (Hysteresis loop). وتدعى قيمة  $\vec{B}$  عند النقطة r بالمغناطيسية المتبقية وقيمة  $\vec{H}$  عند النقطة C بالحفاظية للمادة (Coercivity). نلاحظ من الشكل رقم (5-9) أن قيمة  $\mu$  حسب المعادلة (5-40) تكون سالبة في الربعين الثاني والرابع.

إن شكل دورة التخلف في الشكل رقم (5-10) لا يعتمد على طبيعة المادة الفرومغناطيسية فحسب، بل يعتمد أيضاً على القيمة العظمى للكمية  $\vec{H}$  التي تعرضت إليها المادة. فإذا وصلت  $\vec{H}_{\max}$  لقيمة الإشباع في المادة فإن دورة التخلف بعدها لن تتغير عند زيادة  $\vec{H}_{\max}$ . وقبل الانتهاء من هذا الموضوع نود الإشارة إلى بعض استعمالات المواد الفرومغناطيسية فهي:

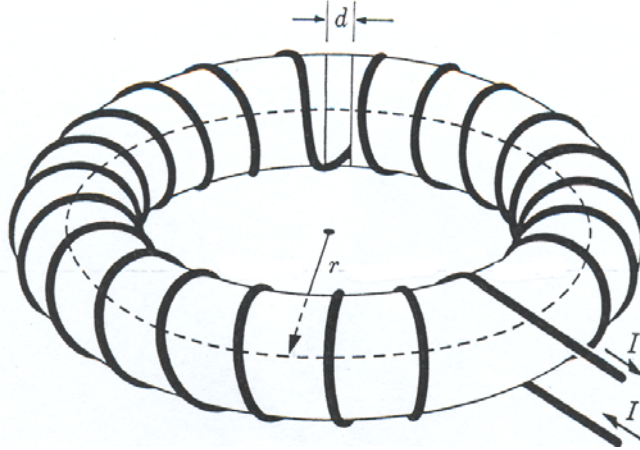
- تستعمل لزيادة التدفق المغناطيسي في دارة كهربائية.
  - تستعمل كمصادر للمجال المغناطيسي بعد مغنطتها.
- أي تستعمل كمغانط دائمة كالتالي تستخدم في السماعات والأجهزة الكهربائية. كما تستعمل في أشرطة التسجيل ودسكات تخزين المعلومات في الكمبيوتر.



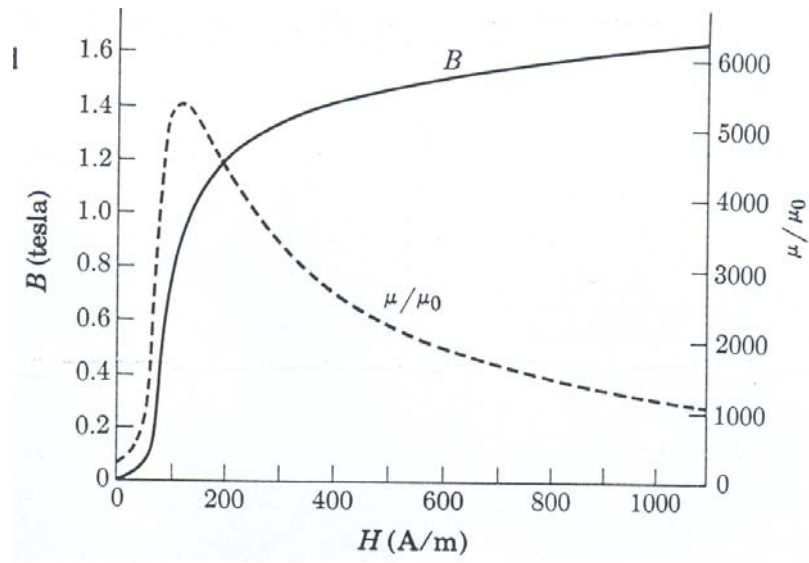
الشكل رقم (١٠-٥)

( - )

حلقة من الحديد الملدن (annealed iron) متوسط طولها 15 cm لف عليها ملف لولبي عدد لفاته 100 لفة كما في الشكل رقم (١١-٥). أوجد المجال المغناطيسي B داخل الحلقة عندما يسري تيار كهربائي قدره (a) 0.1 A (b) 0.2 A (c) 1 A علماً بأن منحنى التمغنط للمادة مبين في الشكل رقم (١٢-٥).



الشكل رقم (٥-١١)



الشكل رقم (٥-١٢)

الحل:

يمكننا إيجاد  $H$  عند أية قيمة للتيار  $I$  بتطبيق قانون أمبير

(المعادلة (5-37)) على النحو التالي:



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int H d\ell = NI$$

ومنها، فإن:

$$H = \frac{NI}{L} = \frac{100}{0.15} I = 667 I \text{ (A / m)}$$

(a) عندما  $I = 0.1A$ ، فإن:

$$H = 66.7 \times 0.1 = 66.7 \text{ A / m}$$

ومن المنحنى المبين في الشكل رقم (٥-١٢)، فإن  $B$  المقابلة لقيمة

$$H = 66.7 \frac{\text{A}}{\text{N}} \text{ هي تقريباً } 0.2 \text{ T}$$

(b) عندما  $I = 0.2A$ ، فإن:

$$H = 667 \times 0.2 = 133.4 \text{ A / m}$$

ومن المنحنى  $B$  تساوي تقريباً  $0.95 \text{ T}$

(c) عندما  $I = 1.0A$ ، فإن:

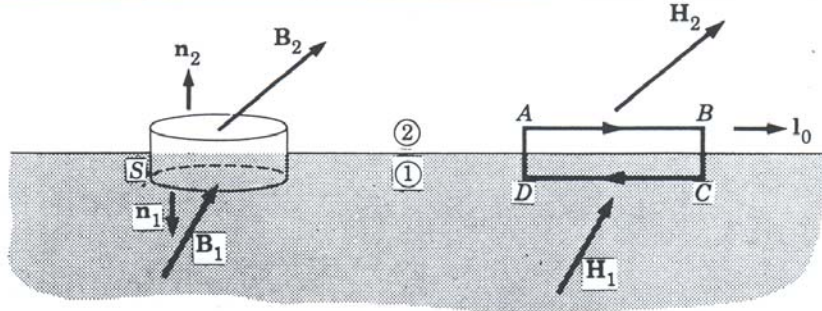
$$H = 667 \times 1 = 667 \text{ A / m}$$

ومن المنحنى فإن  $B$  تساوي تقريباً  $1.52 \text{ T}$

$$\vec{H} \quad \vec{B}$$

تماماً كما بينا ما يحدث في الكهربائية لمتجهي الوحدة  $\vec{D}$  و  $\vec{E}$ ، عند اجتيازهم للسطح الفاصل بين وسطين، سنبحث الآن كيفية تغير متجهي المجال  $\vec{B}$  و  $\vec{H}$  في المغناطيسية عند اجتيازهم للسطح الفاصل بين وسطين مختلفين في خصائصهم المغناطيسية. خذ الوسطين المتلامسين 1 و 2 كما في الشكل رقم (٥-١٣). ولناخذ سطحاً أسطوانياً مغلقاً مثل  $S$ ، بحيث يقطعه السطح الفاصل من

وسطه، وليكن ارتفاعه صغيراً جداً بالمقارنة مع قطر قاعدته وذلك  
لنتمكن من إهمال مساحة السطح المستدير للأسطوانة.



الشكل رقم (٥-١٣)

وبتطبيق قانون التدفق المغناطيسي على السطح الأسطواني  $S$ ، نجد  
أن التدفق المغناطيسي يكون من السطحين العلوي والسفلي فقط لأننا  
أهملنا مساحة السطح المستدير للأسطوانة، وبذلك يكون:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0$$

$$\therefore \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 \Delta S + \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 \Delta S = 0$$

حيث إن  $\hat{n}_1$  و  $\hat{n}_2$  يمثلان العامودين المقامين بالاتجاه الخارجي على  
السطحين السفلي والعلوي على الترتيب. و  $\Delta S$  يمثل مساحة السطح  
العلوي أو السفلي.

وبما أن:

$$\hat{n}_1 = - \hat{n}_2$$

فإن:

$$-\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 \Delta S + \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 \Delta S = 0$$

ومنها فإن:

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_2 = 0$$

أي أن:

$$B_2 \cos \theta_2 - B_1 \cos \theta_1 = 0$$

أو أن:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (5-43)$$

حيث إن:

$\theta_1$  : الزاوية المحصورة بين متجه المجال  $\vec{B}_1$  والعمودية على السطح  $\hat{n}_2$  .  
 $\theta_2$  : الزاوية المحصورة بين متجه المجال  $\vec{B}_2$  والعمودية على السطح  $\hat{n}_2$  .

$B_{1n}$  : المركبة العمودية لمتجه المجال  $\vec{B}_1$  في الوسط الأول.

$B_{2n}$  : المركبة العمودية لمتجه المجال  $\vec{B}_2$  في الوسط الثاني.

ونستنتج من المعادلة (5-43) أن المركبة العمودية للمجال المغناطيسي تكون دائماً متصلة عبر السطح الفاصل بين الوسطين وهذا هو الشرط الحدي الأول.

ويمكننا الحصول على شرط حدي آخر من متجه المجال  $\vec{H}$  وذلك بتطبيق قانون أمبير (المعادلة (5-37)) على المسار المغلق المستطيل الشكل ABCDA والمبين في الشكل رقم (5-13) على النحو التالي:

لنفرض أن:

$$AB = CD = \Delta \ell$$

$$AD = BC = 0 \quad (\text{مهمل الطول})$$

$$\therefore \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I$$

حيث إن، / : التيار الكهربائي المار من خلال المساحة المحاطة بالمنحنى المغلق C (أي المساحة ABCD).

$$\therefore \int_A^B \vec{H}_2 \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{H}_1 \cdot d\vec{\ell} = I = \int \vec{J} \cdot \hat{n} da \quad (5-44)$$

لنفرض أن  $\vec{J}$  عبارة عن التيار المنتقل لكل وحدة طول من الطبقة السطحية ويعرف على النحو التالي:

$$\vec{j} = \lim_{h \rightarrow 0} h \vec{J} \quad (5-45)$$

وبهذا تصبح المعادلة (5-44) على النحو التالي:

$$\vec{H}_2 \cdot \hat{t} \Delta L - \vec{H}_1 \cdot \hat{t} \Delta L = \lim_{h \rightarrow 0} h \vec{J} \cdot \hat{n} \Delta L = \vec{j} \cdot \hat{n} \Delta L \quad (5-46)$$

حيث  $\hat{t}$  : متجه الوحدة بالاتجاه الموازي للوسط الفاصل بين السطحين كما في الشكل رقم (5-13).  $\hat{n}$  : متجه الوحدة العمودي على المساحة ABCD كما في الشكل رقم (5-13). ولكن حسب الشكل رقم (5-13) فإن:

$$\hat{n}_2 \times \hat{t} = \hat{n}$$

وبهذا تؤول المعادلة (5-46) إلى الشكل التالي:

$$\begin{aligned} (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} \Delta L &= \vec{j} \cdot (\hat{n}_2 \times \hat{t}) \Delta L \\ \vec{j} \cdot (\hat{n}_2 \times \hat{t}) \Delta L &= (\vec{j} \times \hat{n}_2) \cdot \hat{t} \Delta L \\ \therefore (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} \Delta L &= (\vec{j} \times \hat{n}_2) \cdot \hat{t} \Delta L \end{aligned}$$

وبما أن المعادلة السابقة تصلح لأي جزء  $\Delta L$  من المسار المغلق، موازٍ للسطح الفاصل، فإن تلك المعادلة يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$\vec{H}_2 - \vec{H}_1 = \vec{j} \times \hat{n}_2$$

ويضرب طرفي المعادلة السابقة ضرباً متجهياً بمتجه الوحدة  $\hat{n}_2$  ، نحصل على:

$$\hat{n}_2 \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \hat{n}_2 \times (\vec{j} \times \hat{n}_2)$$

ولكن مفكوك الطرف الأيمن للمعادلة السابقة بالاستعانة بالمتطابقة التالية:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

هو:

$$\begin{aligned} \hat{n}_2 \times (\vec{j} \times \hat{n}_2) &= \vec{j} (\hat{n}_2 \cdot \hat{n}_2) - \hat{n}_2 (\hat{n}_2 \cdot \vec{j}) \\ &= \vec{j} (1) - 0 \quad \{ \text{ملاحظة: } \hat{n}_2 \text{ عمودي على } \vec{j} \} \\ \hat{n}_2 \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{j} \quad (5-47) \end{aligned}$$

والمعادلة (5-47) هامة جداً في تعيين  $\vec{j}$  عند معرفة  $\vec{H}_1$  و  $\vec{H}_2$  وتمثل الشرط الحدي الثاني.

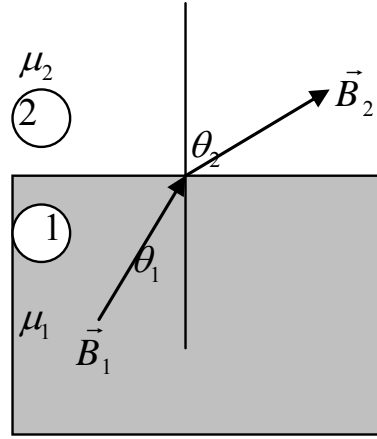
فإذا كانت  $\vec{j}$  تساوي صفراً، فإن:

$$H_{2t} = H_{1t} \quad (5-48)$$

( - )

وسطان مغناطيسيان بينهما سطح فاصل كما في الشكل رقم (٥-١٤). بين أن العلاقة بين الزاوية المحصورة بين  $\vec{B}_1$  والعمودي على السطح والزاوية المحصورة بين  $\vec{B}_2$  والعمودي على السطح وإنفاذية الوسط الأول والثاني  $\mu_1$  و  $\mu_2$  على الترتيب تعطى على النحو التالي:

$$\mu_2 \tan \theta_1 = \mu_1 \tan \theta_2$$



الشكل رقم (٥-١٤)

الحل:

بتطبيق الشروط الحدية على السطح الفاصل، فإن:

$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2 \quad (1)$$

$$H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

$$\frac{B_1 \sin \theta_1}{\mu_1} = \frac{B_2 \sin \theta_2}{\mu_2} \quad (2)$$

وبقسمة المعادلة (2) على المعادلة (1)، نحصل على:

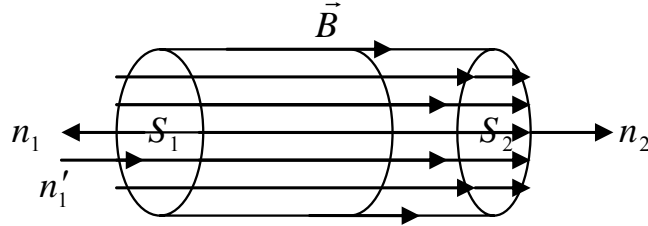
$$\frac{\tan \theta_1}{\mu_1} = \frac{\tan \theta_2}{\mu_2}$$

ومنها فإن:

$$\mu_2 \tan \theta_1 = \mu_1 \tan \theta_2$$

هناك خاصية هامة أخرى للمجال المغناطيسي  $\vec{B}$  وهي أن التدفق المغناطيسي يكون متصلاً دائماً في كل مكان. ولإثبات ذلك، دعنا نتخيل منطقة في الفضاء فيها خطوط مغناطيسية (خطوط وهمية طبعاً).

ولنتخيل أنبوبة بحجم معين من التدفق محاطة من جوانبها بخطوط المجال المغناطيسي دون أن تتقاطع معها ، كما في الشكل رقم (١٥-٥).



الشكل رقم (١٥-٥)

ولنفرض أن السطحين  $S_1$  و  $S_2$  يمثلان نهايتي الحجم الأنبوبي.

وبتطبيق نظرية التفرق (divergence theorem) التالية :

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{B} \, dV &= \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, dA = 0 \\ &= \int_V \vec{B} \cdot \hat{n}_2 \, dA + \int_V \vec{B} \cdot \hat{n}_1 \, dA \\ &= \int_V \vec{B} \cdot \hat{n}_2 \, dA - \int_V \vec{B} \cdot \hat{n}'_1 \, dA = \Phi(S_2) - \Phi(S_1) = 0 \end{aligned}$$

أي أن التدفق المغناطيسي الذي يدخل الأنبوبة من خلال السطح  $S_1$  كما في الشكل رقم (١٥-٥) هو نفسه الذي يخرج من السطح  $S_2$  ، وهذا يحتم على الخطوط أن لا تنتهي أبداً ، إنما تتصل في نهاية المطاف مع نفسها مُشكِّلةً خطوطاً مغلقة.

إن النتيجة أعلاه تنطبق على تدفق المتجه  $\vec{B}$  فقط ولا تنطبق على

تدفق شدة المجال المغناطيسي  $\vec{H}$  . والسبب في ذلك هو ما يلي :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

وبأخذ التفرق لطرفي المعادلة السابقة ، نحصل على :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

ولكن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = -\rho_M$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = +\rho_M$$

وبأخذ التكامل الحجمي لطرفي المعادلة السابقة، نحصل على:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{H} \, d v = \int_V \rho_M \, d v$$

وبتطبيق نظرية التفرق على الطرف الأيسر للمعادلة السابقة، نحصل على:

$$\oint_S \vec{H} \cdot \hat{n} \, d a = \int_V \rho_M \, d v$$

$$\int_{S_1} \vec{H} \cdot \hat{n}_1 \, d a + \int_{S_2} \vec{H} \cdot \hat{n}_2 \, d a = \int_V \rho_M \, d v$$

$$\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$$

وبما أن:

$$\int_{S_1} \vec{H} \cdot \hat{n}_1 \, d a + \int_{S_2} \vec{H} \cdot \hat{n}_2 \, d a = \int_V \rho_M \, d v$$

أي أن:

$$-\Phi(S_1) + \Phi(S_2) = \int_V \rho_M \, d v$$

والمعادلة السابقة تشير إلى أن تدفق شدة المجال المغناطيسي

$\vec{H}$  غير متصل. والانقطاع الحاصل فيها سببه شدة القطب المغناطيسي

الكلية المحصورة داخل أنبوب التدفق الذي حجمه  $V$ .

-

بينما في البند (٥-٨) أن المتجهين  $\vec{B}$  و  $\vec{H}$  يخضعان لشروط

حدودية في الأوساط المغناطيسية مثلما يخضع المتجهان  $\vec{E}$  و  $\vec{D}$  لشروط



حدودية في الأوساط العازلة وسنعالج في هذا البند صنفاً معيناً من المسائل وهو حساب المجالات المغناطيسية داخل الأوساط المغناطيسية التي لا يوجد بداخلها تيار انتقالي (transport current) وهذه الحالة شبيهة تماماً بحالة العازلات التي ناقشناها في الفصل الرابع عندما لم يكن هناك كثافة شحنات حرة خارجية ( $\rho = 0$ ).

عندما لم يكن هناك تيار انتقالي، أي أن  $\vec{J} = 0$ ، فإن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5-49)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} = 0 \quad (5-50)$$

من المعادلة (5-50)، يمكننا اعتبار  $\vec{H}$  كتدرج (gradient) لمجال

عددي مثل  $\phi^*$ .

أي أن:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \phi^* \quad (5-51)$$

حيث إن  $\phi^*$ : الجهد المغناطيسي العددي الناشئ عن جميع المصادر المغناطيسية.

وهناك نوعان من المواد المغناطيسية التي تخضع لإمكانية اختصار حساب المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  إلى مسألة بسيطة من نوع القيم الحدودية (boundary value problem) وهما:

أولاً: المادة المغناطيسية الخطية (linear) أو تقريباً خطية، حيث يمكن وصفها بالعلاقة:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

ثانياً: القطعة المغناطيسية الممغنطة بانتظام (ثابت  $\vec{M}$ ). حيث إن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = -\rho_M = 0$$

وفي الحالتين السابقتين، فإن المعادلة (5-49) تؤول إلى ما يلي:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \mu \vec{H} = \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (5-52)$$

وبالتعويض عن  $\vec{H}$  في المعادلة (5-52) من المعادلة (5-51)، نحصل على:

$$\vec{\nabla} \cdot \left( -\vec{\nabla} \phi^* \right) = 0$$

$$\therefore \nabla^2 \phi^* = 0 \quad (5-53)$$

والمعادلة (5-53) ما هي إلا معادلة لابلاس (Laplace Equation). أي أن

المسألة المغناطيسية للحالات المشار إليها أعلاه، اختصرت إلى مسألة حل لمعادلة لابلاس ضمن شروط حدودية للمسألة، تماماً كما فعلنا في

العازلات. وهكذا عندما نجد  $\phi^*$  يمكننا بعدها إيجاد  $\vec{H}$  على أنها

تدرج (gradient)  $\phi^*$ ، وذلك بتطبيق المعادلة (5-51)، ومن ثم يمكننا

حساب المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  من إحدى العلاقتين التاليتين:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{أو} \quad \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{H} + \vec{M} \right)$$

وذلك حسب المسألة قيد البحث وفيما يأتي مثالان على مسألتين مغناطيسيتين لتوضيح الطريقة أنفة الذكر.

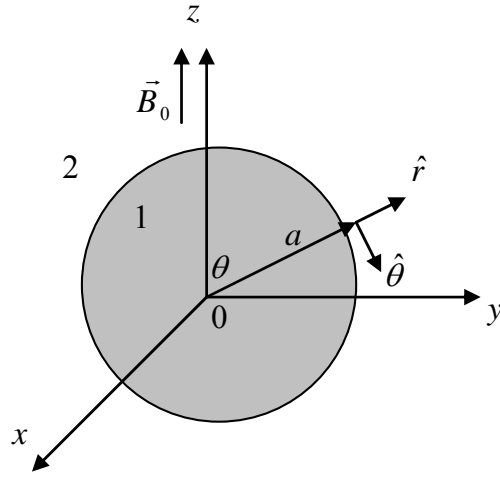
( - )

كرة من مادة مغناطيسية خطية نصف قطرها  $a$  وثابت إنفاذيتها

للمجال المغناطيسي  $\mu$  موضوعة في مجال مغناطيسي منتظم  $\vec{B}_0$  يؤثر في

اتجاه المحور  $z$ ، كما في الشكل رقم (5-16). أوجد كيفية تغير المجال

المغناطيسي  $\vec{B}_0$  نتيجة وضع الكرة المغناطيسية فيه.



الشكل رقم (١٦-٥)

الحل:

يمكن التعبير عن الجهد المغناطيسي  $\phi^*$  بمجموعة توافقيات منطقية على النحو التالي:

$$\phi^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \hat{r} P_n(\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n P_n(\theta)}{r^{n+1}}$$

ويمكن تحقيق جميع الشروط الحدودية للمسألة بواسطة التوافقيات المحتوية على  $\cos \theta$  كما يلي:

أولاً: خارج الكرة في الفراغ، حيث  $r > a$ . إن  $\phi_1^*$  تعطى بالعلاقة:

$$\phi_1^*(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + \frac{C_n \dots}{r^2}$$

$$\phi_1^* = A_0 + \frac{B_0}{r} \left( A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta + \frac{1}{2} \left[ A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^3} \right] (3 \cos \theta) \quad (1)$$

ثانياً: داخل الكرة المغناطيسية، أي في الوسط المغناطيسي، حيث  $r < a$

فإن  $\phi^*$  تعطى بالعلاقة التالية:

$$\phi_2^*(r, \theta) = A_2 r \cos \theta + \frac{C_2 \cos \theta}{r^2} \quad (2)$$

ولنبداً الآن بتطبيق الشروط الحدودية ليتسنى لنا تعيين الثوابت  $A_1$  و  $A_2$  و  $C_1$  و  $C_2$  في المعادلتين (1) و (2).

عند مسافات بعيدة عن الكرة المغناطيسية ( $r \gg a$ )، فإن المجال المغناطيسي لن يتأثر بوجود الكرة المغناطيسية. وبالتالي يحافظ المجال  $\vec{B}_0$  على انتظامه. أي أن:

$$\phi_1^* \Big|_{r \gg a} = A_1 r \cos \theta$$

ولكن:

$$\left| \vec{B}_0 \right| = \mu_0 \left| \vec{H}_0 \right| = \mu_0 \left| -\nabla \phi_1^* \right| = -\mu_0 \frac{d \phi_1^*}{d z}$$

وبإجراء التكامل للمعادلة السابقة، نحصل على:

$$\therefore \phi_1^* = -\frac{B_0}{\mu_0} z = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta = A_1 r \cos \theta$$

ومنها، فإن:

$$A_1 = -\frac{B_0}{\mu_0} \quad (3)$$

في مركز الكرة المغناطيسية ( $r \cong 0$ )

بما أن الجهد المغناطيسي  $\phi_2^* \Big|_{r=0}$  لا يمكن أن يصبح لانهائي

القيمة في مركز الكرة، فإن الثابت  $C_2$  في المعادلة (2) يجب أن يساوي صفراً.

$$\therefore C_2 = 0 \quad (4)$$

على سطح الكرة، حيث  $r = a$ ، فإن:

$$B_{2r} = B_{1r}$$

1. المجال العمودي على سطح الكرة في الوسط

2. المجال العمودي على سطح الكرة في الوسط

$$\begin{aligned} \therefore -\mu \left. \frac{\partial \phi_2^*}{\partial r} \right|_{r=a} &= -\mu \left. \frac{\partial \phi_1^*}{\partial r} \right|_{r=a} \\ -\mu (A_2 \cos \theta) &= -\mu_0 \left( -\frac{B_0}{\mu_0} \cos \theta - \frac{2\mu_0 C_1 \cos \theta}{a^3} \right) \\ \therefore A_2 &= \frac{-B_0}{\mu} - \frac{2\mu_0 C_1}{\mu a^3} \quad (5) \end{aligned}$$

وكذلك:

$$\begin{aligned} H_{2\theta} &= H_{1\theta} \\ -\left. \frac{\partial \phi_2^*}{\partial \theta} \right|_{r=a} &= -\left. \frac{\partial \phi_1^*}{\partial \theta} \right|_{r=a} \\ A_2 a \sin \theta &= -\frac{B_0}{\mu_0} a \sin \theta + \frac{C_1 \sin \theta}{a^2} \end{aligned}$$

ومنها فإن:

$$A_2 = -\frac{B_0}{\mu_0} + \frac{C_1}{a^3} \quad (6)$$

من المعادلتين (5)، (6)، فإن:

$$-\frac{B_0}{\mu_0} + \frac{C_1}{a^3} = \frac{B_0}{\mu} - \frac{2\mu_0 C_1}{\mu a^3}$$

ومنها فإن:

$$C_1 = \left( \frac{\mu_0}{\mu} - 1 \right) \frac{B_0 a^3}{\mu + 2\mu_0} \quad (7)$$

وبالتعويض عن  $C_1$  من المعادلة السابقة في المعادلة (6)، نحصل على:

$$A_2 = -\frac{B_0}{\mu_0} + \left(\frac{\mu_0}{\mu} - 1\right) \frac{B_0}{\mu + 2\mu_0} = -\frac{3B_0}{\mu + 2\mu_0} \quad (8)$$

$$\therefore A_2 = -\frac{3B_0}{\mu + 2\mu_0}$$

وبعد أن أوجدنا الثوابت  $A_1$  و  $A_2$  و  $C_1$  و  $C_2$ ، فإن  $\phi^*$  و  $\phi^*$  تعطيان

بالمعادلتين التاليتين:

$$\phi_1^*(r, \theta) = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + \left(\frac{\mu_0}{\mu} - 1\right) \frac{B_0 a^3}{\mu + 2\mu_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad (9)$$

$$\phi_2^*(r, \theta) = \left(\frac{-3B_0}{\mu + 2\mu_0}\right) r \cos \theta \quad (10)$$

ومن المعادلتين (9) و (10)، فإن:

$$\vec{H}_1 = -\vec{\nabla} \phi_1^* = -\frac{\partial \phi_1^*}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1^*}{\partial \theta} \hat{\theta} \quad (11)$$

ولكن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1^*}{\partial r} &= -\frac{B_0}{\mu_0} \cos \theta - 2 \left(\frac{\mu_0}{\mu} - 1\right) \frac{B_0 a^2}{\mu + 2\mu_0} \frac{1}{r^3} \cos \theta \\ \frac{\partial \phi_1^*}{\partial \theta} &= \frac{B_0}{\mu_0} r \sin \theta - \left(\frac{\mu_0}{\mu} - 1\right) \frac{B_0}{\mu + 2\mu_0} \frac{1}{r^2} \sin \theta \\ \therefore \vec{H}_1 &= \left[ \frac{B_0}{\mu_0} \cos \theta + 2 \left(\frac{\mu_0}{\mu} - 1\right) \frac{B_0 a^2}{\mu + 2\mu_0} \frac{1}{r^3} \cos \theta \right] \hat{r} \\ &+ \left[ -\frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta + \left(\frac{\mu_0}{\mu} - 1\right) \frac{B_0}{\mu + 2\mu_0} \frac{1}{r^2} \sin \theta \right] \hat{\theta} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H}_1 = B_0 [\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}] + \\ + \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \left( \frac{a^3}{r^3} \right) B_0 \sin \theta [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}]\end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\hat{K} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \\ \therefore \vec{B}_1 = B_0 \hat{k} + \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \left( \frac{a^3}{r^3} \right) B_0 [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}] \quad (12)\end{aligned}$$

وكذلك:

$$\begin{aligned}\vec{H}_2 = - \vec{\nabla} \phi_2^* \\ = - \vec{\nabla} \left[ \left( \frac{-3 B_0}{\mu + 2 \mu_0} \right) r \cos \theta \right]\end{aligned}$$

ولكن:

$$\begin{aligned}z = r \cos \theta \\ \therefore \vec{H}_2 = - \vec{\nabla} \left( \frac{3 B_0}{\mu + 2 \mu_0} z \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{3 B_0}{\mu + 2 \mu_0} z \right) \hat{z} = \frac{3 B_0}{\mu + 2 \mu_0} \hat{z}\end{aligned}$$

أي أن:

$$\vec{H}_2 = \frac{3 B_0}{\mu + 2 \mu_0}$$

ومنها، فإن:

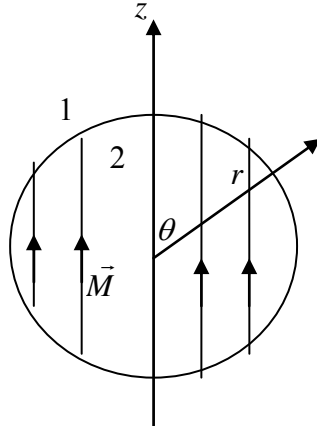
$$\vec{B}_2 = \mu \vec{H}_2 = \frac{3\mu \vec{B}_0}{\mu + 2\mu_0} = \frac{3\vec{B}_0}{1 + 2\frac{\mu_0}{\mu}}$$

$$\therefore \vec{B}_2 = \frac{3\vec{B}_0}{1 + 2\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)} = \text{ثابت} \quad (13)$$

وقبل الانتهاء من هذا المثال يجب ملاحظة التشابه الكبير بين مسألة وضع كرة عازلة في مجال كهربائي منتظم ووضع كرة ممغنطة في مجال مغناطيسي منتظم.. حتى تخطيط المجال للكميتين  $\vec{B}$  و  $\vec{H}$  يشبهان  $\vec{D}$  و  $\vec{E}$  على الترتيب.

( - )

كرة نصف قطرها  $a$ ، ممغنطة بانتظام باتجاه المحور  $z$  بتمغنط  $M_0 \hat{z}$  وموجودة في الفضاء بمعزل عن أي مجال مغناطيسي خارجي، كما في الشكل رقم (١٧-٥). أوجد  $\vec{H}$  و  $\vec{B}$  داخل الكرة وخارجها.



الشكل رقم (١٧-٥)



الحل:

اعتبر الوسط خارج الكرة ① والوسط داخلها ②.

بما أن  $\vec{M}$  ثابتة داخل الكرة، فإن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

ومنها فإن:

$$\nabla^2 \phi^* = 0$$

أي أن  $\phi^*$  تحقق معادلة لابلاس. وبما أن  $\vec{M}$  باتجاه المحور z،فإن  $\phi^*$  تعتمد على  $\theta$  و r ولا تعتمد على  $\phi$ .يمكن كتابة الجهد المغناطيسي العددي  $\phi^*$  بالتوافقيات البسيطة

على النحو التالي:

$$\phi^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \hat{r} P_n(\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n P_n(\theta)}{r^{n+1}}$$

ونظراً لأن:

$$\vec{M} \cdot \hat{n} = M_0 \hat{z} \cdot \hat{n} = M_0 \cos \theta \quad [\hat{n} : \text{العمودي على سطح الكرة}]$$

فإننا نتوقع أن يعتمد الجهد  $\phi^*$  على  $\cos \theta$ . وبالتالي سنكتفي بالحدود

التالية للتعبير عن الجهد.

خارج الكرة وداخلها:

$$\phi_1^*(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + \frac{C_1 \cos \theta}{r^2} ; r \geq a \quad (1)$$

$$\phi_2^*(r, \theta) = A_2 r \cos \theta + \frac{C_2 \cos \theta}{r^2} ; r \leq a \quad (2)$$

ولنطبق الآن الشروط الحدودية للمسألة لإيجاد الثابت  $A_2$  و  $A_1$  و  $C_1$  و  $C_2$  ، وذلك على النحو التالي:  
 أولاً: في مركز الكرة الممغنطة:

نظراً لأن الجهد  $\phi_2^*$  محدد في مركز الكرة، فإننا لا نستطيع الإبقاء على الحد المحتوي على  $\frac{1}{r^2}$ . وبالتالي يجب وضع الثابت  $C_2$  مساوياً للصفر.

$$\therefore C_2 = 0 \quad (3)$$

ثانياً: يجب أن يتلاشى الجهد  $\phi_1^*$  عندما  $r \gg a$ ، لأن تأثير الكرة الممغنطة ينعدم عند مسافات بعيدة وبالتالي يجب علينا التخلص من الحد المحتوي على  $r$  في المعادلة (1). وإلا سيزداد الجهد بزيادة البعد. أي يجب وضع الثابت  $A_1$  مساوياً للصفر.

$$\therefore A_1 = 0 \quad (4)$$

ثالثاً: على سطح الكرة الممغنطة ( $r = a$ )

$$\phi_2^*(a, \theta) = \phi_1^*(a, \theta)$$

أي أن:

$$A_2 a \cos \theta = \frac{C_1 \cos \theta}{a^2}$$

ومنها، فإن:

$$A_2 = \frac{1}{a^3} C_1 \quad (5)$$

وعلى السطح كذلك، تكون مركبات المجال  $\vec{B}$  العمودية متصلة (continuous). أي أن:

$$B_{2r} = B_{1r}$$

$$\therefore \mu_0 (H_{2r} + M_0 \cos \theta) = \mu_0 H_{1r} \quad (6)$$

ولكن:

$$H_{2r} = - \frac{\partial \phi_2^*}{\partial r} = -A_2 \cos \theta \quad (7)$$

$$H_{1r} = - \frac{\partial \phi_1^*}{\partial r} = \frac{2 C_1 \cos \theta}{a^3} \quad (8)$$

وبالتعويض عن  $H_{2r}$  و  $H_{1r}$  من المعادلتين (7) و (8) في المعادلة (6)،

نحصل على:

$$-\mu_0 A_2 \cos \theta + \mu_0 M_0 \cos \theta = \frac{\mu_0 2 C_1 \cos \theta}{a^3}$$

ومنها، فإن:

$$-A_2 + M_0 = \frac{2 C_1}{a^3} \quad (9)$$

ويحل المعادلتين (5)، (9)، نجد أن:

$$A_2 = \frac{1}{3} M_0 \quad (10)$$

$$C_1 = \frac{1}{3} M_0 a^3 \quad (11)$$

وبالتعويض عن  $A_1$  و  $A_2$  و  $C_1$  و  $C_2$  في المعادلتين (1) و (2) نحصل

على:

$$\phi_1^*(r, \theta) = \frac{1}{3} \frac{M_0 a^3}{r^2} \cos \theta \quad ; \quad r \geq a \quad (12)$$

$$\phi_2^*(r, \theta) = \frac{1}{3} M_0 r \cos \theta \quad ; \quad r \leq a \quad (13)$$

ونلاحظ من المعادلة (12)، أن الجهد الخارجي ( $\phi_1^*$ ) الناتج عن كرة

ممغنطة عبارة عن جهد لثنائي قطبي مغناطيسي يأخذ الشكل التالي:

$$\phi_1^*(r, \theta) = \frac{\overline{m} \cdot \overline{r}}{4 \pi r^3} = \frac{m \cos \theta}{4 \pi r^2} = \frac{1}{3} \frac{M_0 a^3}{r^2} \cos \theta \quad (14)$$

حيث إن:

$$m = \frac{4 \pi a^3 M_0}{3} = V M_0$$

حيث:

$m$ : عزم الثاقطي المغناطيسي و  $V$ : حجم الكرة.

أما الشدة المغناطيسية  $\vec{H}$  خارج الكرة وداخلها، فيمكن

إيجادها على النحو التالي:

$$\vec{H}_1 = - \vec{\nabla} \phi_1^* = - \left[ - \frac{2}{3} \frac{M_0 a^3}{r^3} \cos \theta \hat{r} - \frac{1}{3} \frac{M_0 a^3}{r^3} \sin \theta \hat{\theta} \right] \quad (15)$$

$$\therefore \vec{H}_1 = \frac{1}{3} M_0 \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left[ 2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta} \right]$$

$$\vec{H}_2 = - \vec{\nabla} \phi_2^* = - \left[ \frac{1}{3} M_0 \cos \theta \hat{r} - \frac{1}{3} \sin \theta \hat{\theta} \right]$$

$$\therefore \vec{H}_2 = - \frac{1}{3} M_0 \left[ \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \right] = - \frac{1}{3} M_0 \hat{z} \quad (16)$$

وأما المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  خارج الكرة وداخلها، فيمكن إيجاده على

النحو التالي:

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \left( \vec{H}_1 + \vec{M} \right) = \mu_0 \vec{H}_1 \quad (\text{في الخارج } \vec{M} = 0)$$

$$\therefore \vec{B}_1 = \mu_0 \left[ \frac{1}{3} M_0 \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left( 2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta} \right) \right]$$

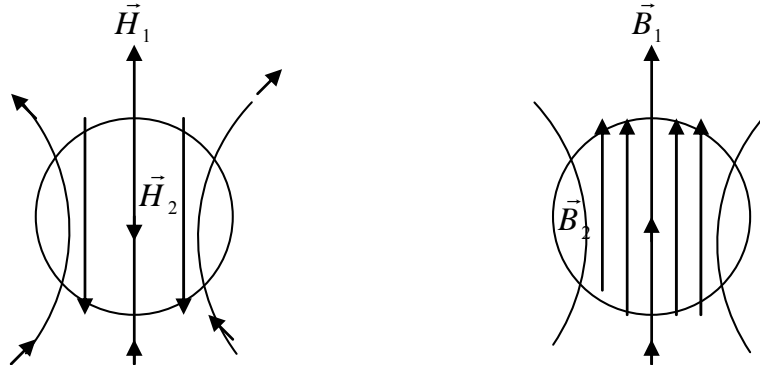
ومنها فإن:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{3} M_0 \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left[ 2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta} \right] \quad (17)$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \left( \vec{H}_2 + \vec{M} \right) = \mu_0 \left( - \frac{1}{3} M_0 \hat{z} + M_0 \hat{z} \right) = \frac{2}{3} \mu_0 M_0 \hat{z}$$

$$\therefore \vec{B}_2 = \frac{2}{3} \mu_0 M_0 \hat{z} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \quad (18)$$

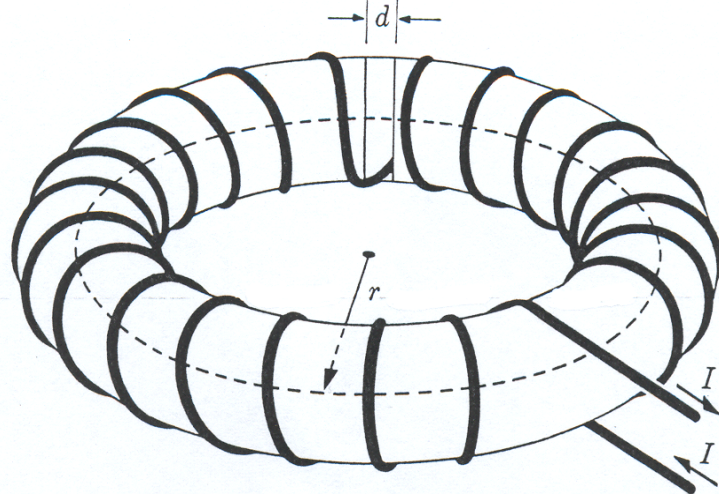
ويبين الشكل رقم (5-18) أدناه الخطوط الممثلة للمتجه  $\vec{H}$  والخطوط الممثلة للمتجه  $\vec{B}$  لكرة ممغنطة بانتظام. ونلاحظ من الشكل رقم (5-18) أن خطوط المجال  $\vec{B}$  متصلة وهي مماثلة تماماً لخطوط ثنائي قطبي، بينما خطوط الشدة المغناطيسية  $\vec{H}$  غير متصلة واتجاهها داخل الكرة باتجاه محور  $z$  - السالب. أي بعكس اتجاه التمغنط  $M_0 \hat{z}$  (انظر المعادلة (5-16)). ويطلق على هذا المجال بالمجال المزيل للمغناطيسية (Demagnetizing Field). وهو يماثل تماماً المجال الناتج في العازلات نتيجة الاستقطاب. حيث يكون مجال الاستقطاب معاكساً للمجال الخارجي دائماً.



الشكل رقم (5-18)

لقد بينا كيفية حساب المجال المغناطيسي في الفراغ الناشئ عن تيارات كهربائية حقيقية، وأخذنا أمثلة عديدة على تيارات كهربائية تمر بأسلاك بأشكال مختلفة.

افتراض ملفاً إطارياً منتظماً ويحمل تياراً  $I$  ، ولكن الملف في هذه الحالة قد لف على مادة فرومغناطيسية كما في الشكل رقم (١٩-٥). وسنفرض أن هذه المادة الفرومغناطيسية متجانسة (Homogeneous) وغير ممغنطة أصلاً (Unmagnetized) وسوية الخواص في جميع الاتجاهات (Isotropic). ومن الأفضل لنا أن نستخدم متجه شدة المجال  $\vec{H}$  بدلاً من المجال  $\vec{B}$  ، لأن الأول يرتبط مباشرة بقيمة التيار  $I$  الذي يسري في الملف.



الشكل رقم (١٩-٥)

حسب قانون أمبير المتمثل بالعلاقة التالية:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI$$

ويتطبيق المعادلة السابقة على المسار الدائري (المغلق) الذي نصف قطره  $r$  في الملف الإطاري المبين في الشكل رقم (١٩-٥)، وحيث إن قيمة  $\vec{H}$  ثابتة عند جميع نقاط المسار الدائري، فإن:

$$H_t L = NI$$

ومنها ، فإن :

$$H_t = \frac{NI}{L} \quad (5-54)$$

حيث إن :

$L$  : طول المسار الدائري ويساوي  $2\pi r$

$N$  : عدد لفات الملف الإطاري.

$H_t$  : شدة المجال المغناطيسي المماسي للمسار الدائري.

ولكن العلاقة بين  $\vec{B}$  و  $\vec{H}$  ، وهي :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

ومنها فإن :

$$B_t = \mu_0 (H_t + M_t)$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة عن  $H_t$  من العلاقة (5-54) ، نجد أن :

$$B_t = \mu_0 \frac{NI}{L} + \mu_0 M_t \quad (5-55)$$

حيث تمثل  $B_t$  و  $M_t$  ، المركبات المماسية للمجال المغناطيسي  $\vec{B}$

والتمغنت  $\vec{M}$  ، على الترتيب.

والمعادلة (5-55) تختلف عن معادلة المجال المغناطيسي داخل ملف

إطاري ملفوف على قالب بداخله فراغ ، حيث إن المجال في تلك الحالة

يعطى بالعلاقة :

$$B_t = \mu_0 \frac{NI}{L} \quad (5-56)$$

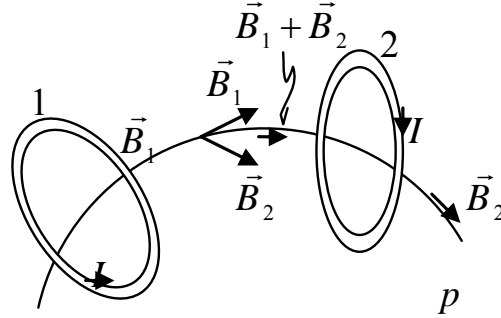
وواضح أن سبب الاختلاف بين المعادلتين (5-55) ، (5-56) هو وجود المادة

الفرومغناطيسية داخل الملف الإطاري مما أدى إلى ظهور الحد الأخير في

المعادلة (5-55).

كما نلاحظ من المعادلة (5-55) ظهور المركبتين المماسيتين فقط للمجالين  $\vec{B}$  و  $\vec{H}$ . وفي حقيقة الأمر أنه لا يوجد مركبات أخرى غير مماسية. ويمكننا إثبات ذلك بسهولة، حيث إن مصادر المجال هي التيارات الحقيقية المارة في أسلاك الملف والمادة المغناطيسية (الفرومغناطيسية) الموجودة داخل الملف وتأثيرها على النحو الآتي:

أولاً: يؤثر التيار الحقيقي الذي يسري في الملف الذي عدد لفاته  $N$  من اللفات الحاملة للتيار بمجال مغناطيسي مماس. ويمكن تخيل ذلك بأخذ أزواج من اللفات المتقابلة (اللفة 1 و 2) كما في الشكل رقم (5-20). ويتضح لنا أن كل لفة تولد مجالاً عند نقطة مثل  $p$  تقع في وسط المسافة بين اللفتين 1 و 2، وتكون محصلة المجال الناشئ عندها مماساً للمسار الدائري.



الشكل رقم (5-20)

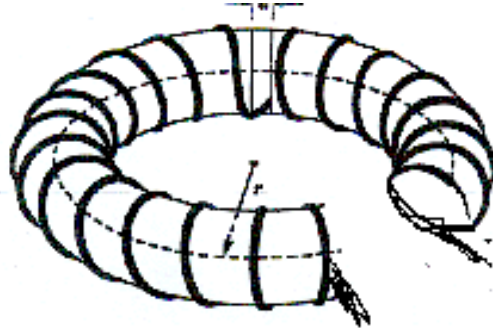
ثانياً: تؤثر المادة الممغنطة داخل الملف بشدة مغناطيسية من خلال كثافتي القطب الحجمية  $\rho_M$  والسطحية  $\sigma_M$  ( $\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n}$ ،  $\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M}$ ). وبما أننا افترضنا أن المادة المغناطيسية سوية الخواص في جميع الاتجاهات، فإن اتجاه  $\vec{M}$  سيكون في اتجاه  $\vec{H}$  دائماً (انظر



المعادلة (5-38)، ولكن نشوء  $\vec{M}$  بسبب مرور التيار الكهربائي في الملف الذي ولد  $\vec{B}$  وبالتالي  $\vec{H}$  في الاتجاه المماس للمسار الدائري. ولهذا تنشأ مركبة للتمغنط  $\vec{M}$  بالاتجاه المماس فقط. ونظراً لعدم وجود سطوح عمودية على متجه التمدغنط  $\vec{M}$  لأي عينة حلقيية يمكن أخذها من الملف فإن  $\rho_M = \sigma_M = 0$  على الرغم من أن  $\vec{M}$  دالة في  $r$ . إلا أن  $\frac{\partial M}{\partial r}$  لا تساهم بأية قيمة في المقدار  $\nabla \cdot \vec{M}$ .

ونستنتج مما سبق أن المادة الممغنطة في الملف الإطاري لا تساهم في تكوين المجال المغناطيسي. أي أن المجال المغناطيسي الناتج عن التيار الحقيقي في الملف والمعطى بالمعادلة (5-55) يعبر عن المجال المغناطيسي الكلي في الملف.

نحتاج أحياناً في بعض التطبيقات العملية للتعامل مع ملف إطاري يحتوي على مادة فرومغناطيسية ويحتوي أيضاً على قطع فيه سمكها  $d$  مثلاً، كما في الشكل رقم (5-21).



الشكل رقم (5-21)

سنعامل فجوة الهواء للقطع في الشكل رقم (5-21). وكأنها فجوة من الفراغ وذلك لعدم اختلاف نفاذية الهواء كثيراً عن الفراغ

(  $\mu_0 \cong \mu_{\text{air}}$  ) . وهنا لا نستطيع استخدام قانون أمبير للدارات الكهربائية لتعيين  $\vec{H}$  لأن قيمته غير ثابتة عند جميع نقاط المسار الدائري. لهذا سنعود لاستخدام المعادلة (5-35)، التالية:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' - \nabla \phi^*(\vec{r})$$

ونلاحظ من المسألة قيد البحث أن كلاً من التيارات الحقيقية والتمغنت يساهم في تكوين  $\vec{H}$ . بما أن لفات الملف في الشكل رقم (5-21). متماثلة مع لفات الملف في المسألة السابقة (الشكل رقم (5-19))، فإن مساهمة التيارات الحقيقية في  $\vec{H}$  يجب أن تكون نفسها. فإذا رمزنا لهذه المساهمة بالرمز الدليلي السفلي 1، فإن بالإمكان كتابة  $H_1$  على النحو التالي:

$$H_1 = \frac{NI}{L} \quad (5-57)$$

وتبقى لدينا الآن مشكلة إيجاد  $H_2$  أو  $\nabla \phi^*$  وهي عبارة عن مساهمة التمغنت. ولتسهيل عملية إيجادها، نفرض أن مركبة التمغنت المماسية  $M_t$  منتظمة خلال المادة الفرومغناطيسية في الملف وبالتالي يصبح لدينا:

$$\rho_M = 0 \quad (\text{في كل مكان})$$

(على وجهي الأقطاب المحاذية للفجوة)  $\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n} = \pm M_t = \pm M$  والفجوة المبينة في الشكل رقم (5-21) شبيهة جداً بالمكثف المشحون ذي الصفيحتين المتوازيتين وبالتالي فإن صيغ الجهد في الحالتين متماثلة. لنفرض الآن أن الفجوة الهوائية في الشكل رقم (5-21) ضيقة جداً. من المعادلة (5-55)، فإن:

مساهمة التمغنت + مساهمة التيارات الحقيقية =

$$\frac{B}{\mu_0} = \frac{NI}{L} + M = H_1 + H_2$$

ومنها، فإن:

$$H_2 = M \quad (\text{في الفجوة}) \quad (5-58)$$

$$= 0 \quad (\text{في كل مكان عدا الفجوة})$$

ولكن النتيجة السابقة لا تتفق مع قانون أمبير للدارات الكهربائية، وذلك لأن تطبيق القانون السابق الذكر يتم على مسار مغلق، وعند تطبيقه تكون نتيجته ما يلي:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint H d\ell = \oint (H_1 + H_2) d\ell = \oint H_1 d\ell + \oint H_2 d\ell \\ = NI + Md \neq NI \quad (5-59)$$

ومن الممكن أن تكون:

$$NI + Md \approx NI$$

عندما تكون فقط  $d$  صغيرة جداً لحد الإهمال. أما إذا لم يكن بالإمكان إهمال  $d$  فإن من الأفضل استخدام التقريب التالي:

$$\left. \begin{aligned} H_2 &= M \left( 1 - \frac{d}{L} \right) && (\text{في الفجوة}) \\ &= -M \frac{d}{L} && (\text{في كل مكان عدا الفجوة}) \end{aligned} \right\} \quad (5-60)$$

أي في المادة

المعادلة (5-60) أفضل من المعادلة (5-58) حيث إنها ليست فقط تحقق قانون أمبير للدارات المغلقة بل تحقق أيضاً الشرط الحدي الخاص بالمجال  $\vec{B}$  وهي المركبة العمودية على سطح القطب  $(B_n)$ .

ويمكننا الآن إيجاد المجال المغناطيسي في الفجوة وكذلك في

المادة المغناطيسية على النحو التالي:

$$B \text{ (في الفجوة)} = \mu_0 (H_1 + H_2) = \mu_0 H_1 + \mu_0 H_2$$

وبالتعويض عن  $H_1$  من المعادلة (5-57) و  $H_2$  من المعادلة (5-60) في المعادلة

السابقة، نحصل على:

$$= \mu_0 \frac{NI}{L} + \mu_0 M \left(1 - \frac{d}{L}\right) \quad (5-61)$$

(في الفجوة)  $B$

وكذلك:

$$= \mu_0 (H_1 + H_2 + M) = \mu_0 H_1 + \mu_0 H_2 + \mu_0 M$$

(في المادة)  $B$

وبالتعويض عن  $H_1$  و  $H_2$  من المعادلتين (5-57) و (5-60) على الترتيب،

نحصل على:

$$\begin{aligned} B \text{ (في المادة)} &= \mu_0 \frac{NI}{L} + \mu_0 \left(-M \frac{d}{L}\right) + \mu_0 M \\ &= \mu_0 \frac{NI}{L} + \mu_0 M \left(1 - \frac{d}{L}\right) \end{aligned} \quad (5-62)$$

$\therefore B$  (في المادة)

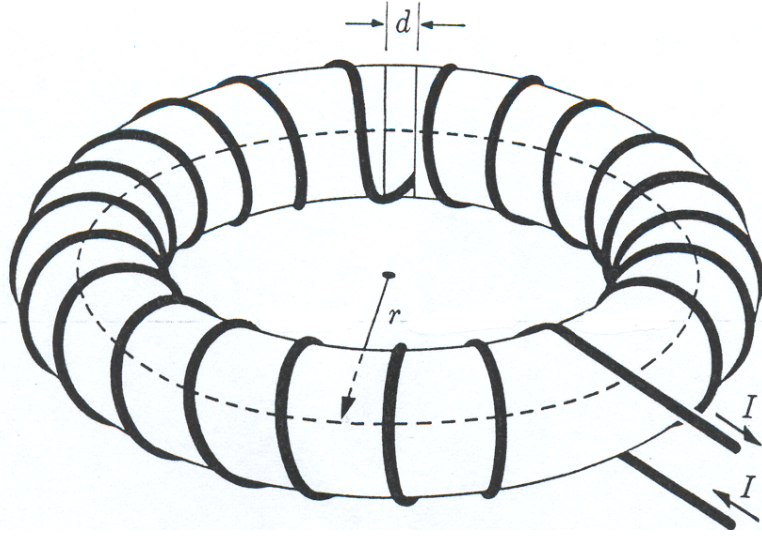
ونلاحظ تساوي المعادلتين (5-61) و (5-62). أي أن لكلا المعادلتين يمكن

استخدامهما لإيجاد المجال المغناطيسي في الفجوة الهوائية وكذلك في المادة

المغناطيسية دون تمييز.

( - )

حلقة حديدية دائرية الشكل، مساحة مقطعها  $A = 1000\text{mm}^2$  ومتوسط طولها  $L = 600\text{mm}$  كما في الشكل رقم (٥-٢٢). أوجد حاصل ضرب اللفات في التيار  $NI$  اللازم لتوليد مجال مغناطيسي  $\bar{B}$  مقداره  $IT$ ، إذا علمت أن قيمة  $\bar{H}$  من المنحنى  $BH$  تساوي  $1000\text{A/m}$  عندما تكون  $\bar{B}$  مساوية  $IT$ ، أوجد قيمة  $\frac{\mu}{\mu_0}$  عند هذه القيمة لـ  $H$ .



الشكل رقم (٥-٢٢)

الحل:

يعطى المجال المغناطيسي  $B$  داخل حلقة مغناطيسية مغلقة،

بالعلاقة:

$$B = \frac{\mu NI}{L} \quad (\text{قانون أمبير})$$

حيث  $\mu$ : ثابت نفاذية الحديد و  $L$ : طول الحلقة ويساوي  $2\pi$ .

ومن العلاقة أعلاه، فإن:

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{NI}{L}$$

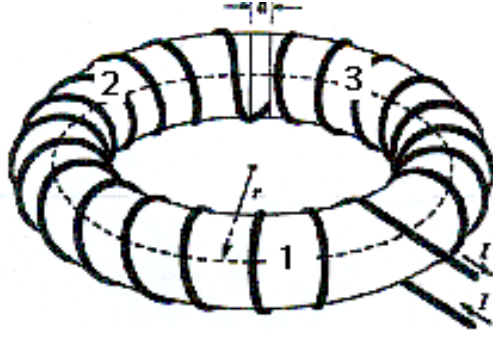
$$\therefore 1000 \frac{A}{m} = \frac{NI}{600 \times 10^{-3} m} \Rightarrow NI = 600$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7} \times 1000} = 776$$

### (Magnetic Circuits)

بينما سابقاً أن خطوط التدفق المغناطيسي تشكل مسارات مغلقة. فإذا وجدت خطوط التدفق المغناطيسية الناتجة عن تيارات معينة محصورة في مسار محدد، فإن بالإمكان اعتبارها دارات مغناطيسية. وقد تعرضنا في البند السابق لمثالين على الدارات المغناطيسية كان فيهما التدفق المغناطيسي محصوراً في المنطقة الواقعة داخل لفات الملف الإطاري. ففي المثال الأول، الشكل رقم (٥-١٩) تكونت الدارة المغناطيسية من مادة واحدة هي المادة الفرومغناطيسية. وفي المثال الثاني، الشكل رقم (٥-٢١) كانت الدارة المغناطيسية عبارة عن دائرة توالي مكونة من مادتين هما المادة الفرومغناطيسية والهواء.

لنأخذ دائرة توالي مغناطيسية عامة مكونة من عدد من المواد (ثلاث مواد على سبيل المثال) المحاطة بلفات عددها  $N$  وتحمل تياراً  $I$ ، كما هو مبين في الشكل رقم (٥-٢٣).



الشكل رقم (٥-٢٣)

وبتطبيق قانون أمبير حول مسار دائري كما في الشكل رقم (٥-٥)

(٢٣) مركزه منطبق على مركز الملف، فإننا نحصل على:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint H d\ell = NI \quad (5-63)$$

ومن الملائم أن نعبّر عن  $H$  عند كل نقطة من نقاط المسار الدائري بدلالة التدفق  $\Phi$ ، وذلك باستخدام المعادلتين التاليتين:

$$B = \mu H ; \Phi = BA$$

ومنهما، فإن:

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{\Phi}{\mu A} \quad (5-64)$$

حيث  $A$ : مساحة مقطع الدارة المغناطيسية. وبالتعويض عن  $H$  من المعادلة السابقة في المعادلة (5-63)، نحصل على:

$$\oint \frac{\Phi d\ell}{\mu A} = NI$$

وبما أننا نتعامل مع دائرة مغناطيسية، فإن من المتوقع أن يكون التدفق المغناطيسي  $\Phi$  ثابتاً لجميع النقاط لهذه الدارة. وبالتالي يمكننا

إخراج  $\Phi$  خارج التكامل في المعادلة السابقة، ويصبح شكل تلك المعادلة على النحو التالي:

$$\Phi \oint \frac{d\ell}{\mu A} = NI$$

ومنها، فإن:

$$\Phi = \frac{NI}{\oint \frac{d\ell}{\mu A}} \quad (5-65)$$

والمعادلة (5-65) تذكرنا بمعادلة شبيهة مألوفة في الدارات الكهربائية، ألا وهي:

$$\mathcal{E} = IR$$

وطبقاً للتناظر الموجود بين المغناطيسية والكهربائية، فإن القوة الدافعة المغناطيسية، والتي يرمز لها بالرمز  $mmf$ ، تعرف وفق المعادلة التالية:

$$mmf = NI \quad (5-66)$$

وتعرف المقاومة المغناطيسية والتي يرمزها  $\mathfrak{R}$ ، على النحو التالي:

$$\mathfrak{R} = \oint \frac{d\ell}{\mu A} \quad (5-67)$$

وباستخدام المعادلتين (5-66) و(5-67)، يمكننا كتابة المعادلة (5-65) على النحو التالي:

$$\Phi = \frac{mmf}{\mathfrak{R}} \quad (5-68)$$

أما إذا تكونت الدارة المغناطيسية من عدد من القطع المغناطيسية، كما في الشكل رقم (5-23) بحيث أن لكل قطعة مغناطيسية مقطعاً عرضياً منتظماً، فبالإمكان إيجاد المقاومة المغناطيسية على النحو التالي:



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint H dl = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 = NI$$

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{\Phi_1}{\mu_1 A_1} = \frac{\Phi}{\mu_1 A_1}$$

وبالمثل:

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_2} = \frac{\Phi_2}{\mu_2 A_2} = \frac{\Phi}{\mu_2 A_2}$$

$$H_3 = \frac{B_3}{\mu_3} = \frac{\Phi_3}{\mu_3 A_3} = \frac{\Phi}{\mu_3 A_3}$$

$$\therefore \frac{\Phi l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\Phi l_2}{\mu_2 A_2} + \frac{\Phi l_3}{\mu_3 A_3} = \Phi \left[ \frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_2}{\mu_2 A_2} + \frac{l_3}{\mu_3 A_3} \right] = NI$$

أي أن:

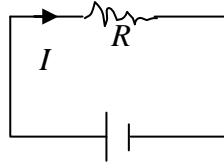
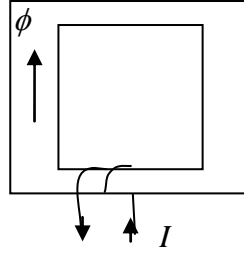
$$\Phi \mathcal{R} = NI = m m f$$

حيث إن:

$$\mathcal{R} = \frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_2}{\mu_2 A_2} + \frac{l_3}{\mu_3 A_3} = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\mu_i A_i} = \sum_{i=1}^n \mathcal{R}_i \quad (5-69)$$

وتشير المعادلة (5-69) إلى أن المقاومة المغناطيسية الكلية لدائرة توالي تساوي مجموع المقاومات المغناطيسية للعناصر المتكونة منها.

إن التناظر بين الدارات المغناطيسية والدارات الكهربائية كبير جداً، ويجري جمع المقاومات المغناطيسية على التوالي وعلى التوازي بنفس الطريقة التي يجري بها جمع مقاومات الدارات الكهربائية. كما أن الدارات في الحالتين متشابهة كما في الشكل رقم (٥-٢٤).



الشكل رقم (٥-٢٤)

وتجدر الإشارة هنا أيضاً إلى الشبه الكبير بين المعادلة (5-67)

والمعادلة التالية:

$$R = \int \frac{d\ell}{gA} \quad (6-70)$$

والمعادلة (5-70) تربط بين المقاومة الكهربائية  $R$  والأبعاد الهندسية

لها مادة معينة موصليتها (Conductivity) عبارة عن  $g$ . ولا تختلف هذه

المعادلة عن المعادلة (5-67) بدلاً من الإنفاذية  $\mu$ .

لنعيد النظر الآن إلى المعادلة (5-69). سنلاحظ أن المقاومة

المغناطيسية  $\mathfrak{R}_i$  تتناسب عكسياً مع إنفاذية الوسط  $\mu_i$ . أي أن:

$$\mathfrak{R}_i \propto \frac{1}{\mu_i}$$

ولما كانت إنفاذية المواد الفرومغناطيسية  $\mu_i$  أكبر بكثير من إنفاذية

الفراغ  $\mu_0$  (بحوالي مئة مرة وتصل حتى مئة ألف مرة) فمن الواضح عندئذ

أن المادة الفرومغناطيسية تشكل ممراً ذا مقاومة مغناطيسية منخفضة

للتدفق المغناطيسي. فإذا لاقى التدفق مساراً مغلقاً من دائرة مغناطيسية

منخفضة المقاومة فإن التدفق يسير فيها. وكذلك عندما يلاقي التدفق المغناطيسي مسارين متوازيين أحدهما يمتلك مقاومة عالية  $\mathfrak{R}_h$  والآخر يمتلك مقاومة مغناطيسية منخفضة  $\mathfrak{R}_L$  لوجدنا أن معظم التدفق يمر خلال المسار الذي يكون مقاومته منخفضة.

يمكن إيجاد المقاومة المكافئة لمسارين متوازيين من العلاقة

التالية:

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}_h \mathfrak{R}_L}{\mathfrak{R}_h + \mathfrak{R}_L} \quad (5-71)$$

وفي حالة

$$\mathfrak{R}_h \gg \mathfrak{R}_L$$

فإن:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_L$$

-

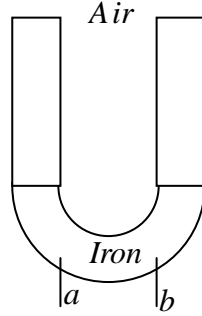
يمكننا تطبيق مفهوم الدارة المغناطيسية التي ناقشناها في البند (٥-١١) السابق على دارات تحتوي على مغناط دائمة. والمقصود هنا بدارات المغناط الدائمة تلك التي تحتوي على تدفق مغناطيسي نابع من مادة ممغنطة بشكل دائم (Permanent Magnet). وسنرمز للمغناط الدائمة بالرمز PM لأجل السهولة والاختصار.

لنفرض مادة PM موجودة بين النقطتين a و b في مسار التدفق

المغناطيسي كما في الشكل رقم (٥-٢٥)، فإننا نحصل على:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint H d\ell = \int_a^b H d\ell + \int_{b(PM)}^a H d\ell = 0$$

$$\therefore \int_a^b H d\ell = - \int_{b(PM)}^a H d\ell \quad (5-72)$$



الشكل رقم (٥-٢٥)

وباستخدام العلاقتين:

$$\Phi = B A ; B = \mu H$$

فإن الطرف الأيسر للمعادلة (5-72) يصبح على النحو التالي:

$$\Phi \int_a^b \frac{d\ell}{\mu A} = - \int_{b(PM)}^a H d\ell \quad (5-73)$$

ونلاحظ من الشكل رقم (٥-٢٥)، أن التدفق المغناطيسي  $\Phi$  متصلًا

خلال جميع أجزاء الدارة المغناطيسية. ولذلك فإن:

$$\Phi = B_m A_m \quad (5-74)$$

حيث إن،  $B_m$ : المجال المغناطيسي داخل المغناطيس الدائم،  $A_m$ :

مساحة مقطعه العرضي.

وبالتالي يمكن كتابة الطرف الأيمن للمعادلة (5-73) على النحو

التالي:

$$- \int_{b \text{ (PM)}}^a H d \ell = -H_m \ell_m \quad (5-75)$$

حيث إن،  $H_m$  : متوسط الشدة المغناطيسية داخل المغناطيس و  $\ell_m$  : طول المغناطيس.

وهكذا يمكننا كتابة المعادلة (5-75) على النحو التالي:

$$\Phi \int_a^b \frac{d \ell}{\mu A} = -H_m \ell_m = B_m A_m \mathcal{R}_{ab}$$

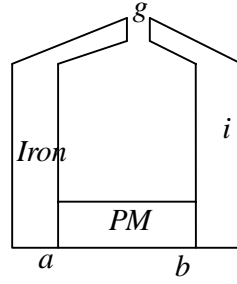
ومنها فإن:

$$B_m A_m \mathcal{R}_{ab} = -H_m \ell_m \quad (5-76)$$

ونلاحظ من المعادلة (5-76) أنها تربط بين كميتين مجهولتين هما  $H_m$  و  $B_m$ . ويمكن حلها لدارة مغناطيسية تحتوي على مغناطيس دائم أيضاً وذلك باستخدام منحنى التخلف المغناطيسي (Hysteresis Curve) لذلك المغناطيس للحصول على قيمتي  $H_m$  و  $B_m$  كما في المثال التالي.

( - )

دارة مغناطيسية مكونة من مغناطيس دائم (PM) وفجوة هوائية وحديد مطاوع كما في الشكل رقم (5-26). ومن المعلوم أن الحديد المطاوع ليس مادة مغناطيس دائم، وأنه ذو تخلف مغناطيسي يمكن إهماله بالمقارنة مع التخلف المغناطيسي للمغناطيس الدائم، كما أن نفاذيته  $\mu_i$  موجبة. وسنبين كيفية تحديد نقطة العمل للمغناطيس (Operating Point) والتدفق المغناطيسي  $\Phi$  و المجال المغناطيسي في الفجوة الهوائية  $B_g$ .



الشكل رقم (٥-٢٦)

الحل:

تعطي المقاومة المغناطيسية للمادة بين النقطتين  $a$  و  $b$  خلال المسار العلوي (خارج المغناطيس الدائم) بالعلاقة:

$$\mathcal{R}_{ab} = \mathcal{R}_i + \mathcal{R}_g$$

إذ يشير الرمز  $\mathcal{R}_i$  للدليلان السفليان  $i$  و  $g$  إلى الحديد المطاوع وفجوة الهواء على الترتيب.

ونظراً لأن  $\mu_i \gg \mu_0$  ( $\mu_0 \cong \mu_g$ ) وفي حالة كون فجوة الهواء

واسعة قليلاً، فإن المعادلة السابقة تؤول إلى ما يلي:

$$\mathcal{R}_{ab} \cong \mathcal{R}_g$$

$$\therefore \mathcal{R}_{ab} \cong \frac{\ell_g}{\mu_0 A_g} \quad (1)$$

وبالتعويض عن  $\mathcal{R}_{ab}$  في المعادلة (5-76) التالية:

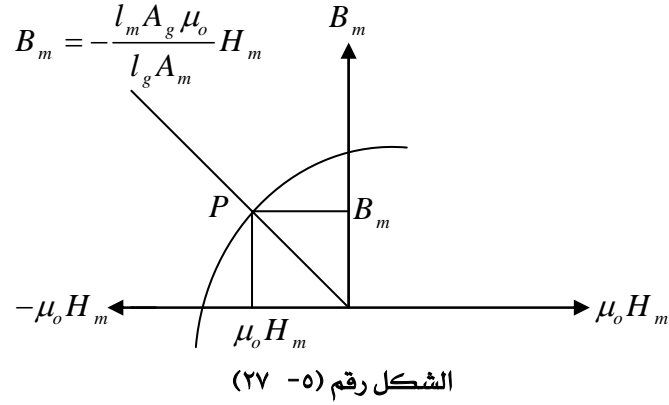
$$B_m A_m \mathcal{R}_{ab} = -H_m \ell_m$$

نحصل على:

$$B_m = -\frac{\ell_m A_g \mu_0}{\ell_g A_m} H_m = \text{ثابت} \times H_m \quad (2)$$

ونلاحظ من المعادلة (2) السابقة أنها علاقة بين  $B_m$  و  $H_m$  وهي علاقة خطية يمكن تمثيلها بالخط المنقط في الشكل رقم (٥-٢٧). كما يمكن

يرسم منحني التخلف للمغناطيس كما هو واضح من الخط المتصل في الشكل رقم (٥-٢٧). وتمثل نقطة التقاطع بين المنحنيين (النقطة p) نقطة العمل للمغناطيس (Operating Point). وهكذا بعد الحصول على الشكل رقم (٥-٢٧) ويمكننا تعيين  $\Phi$  ، ومنها يمكن تعيين  $\frac{\Phi}{A_g}$  (أي  $B_g$ ) بعد أن نكون قد حصلنا على  $B_m$  .



ونلاحظ أيضاً أن قيمة  $H_m$  المعينة من الشكل سالبة. وهذا يعني أن الشدة المغناطيسية  $H_m$

$$\therefore \Phi \int_a^b \frac{d\ell}{\mu A} + H_m \ell_m = NI$$

ولكن:

$$\Phi = \Phi_m = \Phi_i = \Phi_g = B_m A_m$$

وكذلك:

$$\int_a^b \frac{d\ell}{\mu A} = \mathfrak{R}_{ab}$$

$$\therefore B_m A_m \mathfrak{R}_{ab} + H_m \ell_m = NI \quad (1)$$

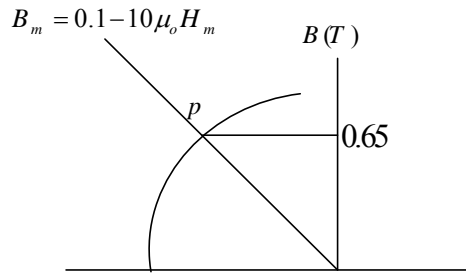
ولكن:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R_{\text{جدار}} + R_{\text{جو}} = \frac{\ell_i}{\mu_i A_i} + \frac{\ell_g}{\mu_o A_g} = \frac{1}{A} \left[ \frac{\ell_i}{\mu_i} + \frac{\ell_g}{\mu_o} \right] \\ \therefore R_{ab} &= \frac{1}{A} \left[ \frac{0.16}{5000 \mu_o} + \frac{0.01}{\mu_o} \right] \cong \frac{\ell_g}{\mu_o A} \quad (2) \\ \therefore R_{ab} &\cong \frac{0.01}{\mu_o A} \end{aligned}$$

وبالتعويض عن  $R_{ab}$  من المعادلة السابقة في المعادلة (1)، نحصل على:

$$\begin{aligned} B_m A \frac{0.01}{\mu_o A} + H_m \ell_m &= N I \\ \therefore B_m &= \mu_o (N I - H_m \ell_m) / 0.01 = \frac{4 \pi \times 10^{-7} \times 800}{0.01} - \mu_o \times \frac{0.1}{0.01} H_m \\ B_m &= 0.1 - 10 \mu_o H_m \quad (3) \end{aligned}$$

ويرسم الخط المستقيم الممثل بالمعادلة (3) على منحنى التخلف للمادة المصنوع منها المغناطيس فإننا نحصل على نقطة عمل المغناطيس (النقطة p) ومن مسقط هذه النقطة على المحور العمودي نحصل على قيمة المجال المغناطيسي  $B_m$  ومقدارها حوالي 0.65 T.



ولكن:

$$\begin{aligned} \Phi &= B_m A_m = B_g A_g \\ A_m &= A_g = A \\ \therefore B_m &= B_g = 0.65 \text{ T} \end{aligned}$$



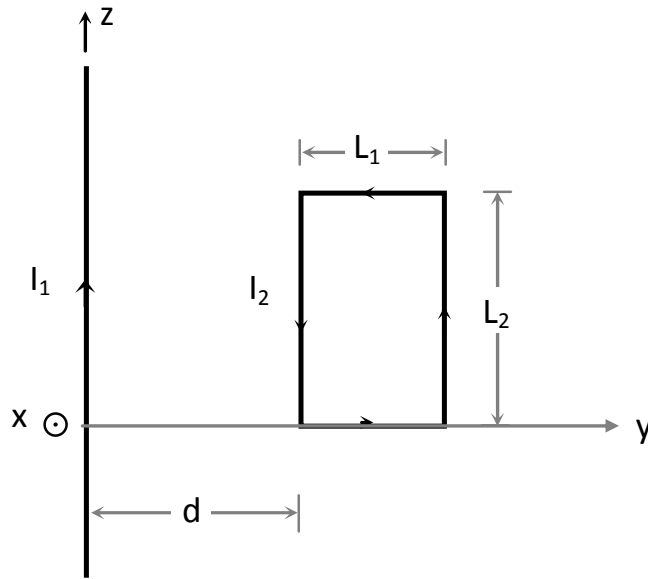
أوجد المجال المغناطيسي  $H$  وكثافة الفيض المغناطيسي  $B$  الناتجة عن حلقة مستطيلة  $a \times b$  يمر فيها تيار  $I$  بعكس اتجاه دروان عقارب الساعة، علماً بأن هذه الحلقة موضوعة في المستوى  $x-y$  ومركزها عند نقطة الأصل وذلك عند نقطة  $(0, 0, z)$  تقع على محور  $z$ .

إذا كانت كثافة التيار المار في موصل أسطوانى طويل هي  $J_z = \alpha \rho$   $A/m^2$  للمدى  $0 \leq \rho \leq a$  في اتجاه محوره. أوجد المجال المغناطيسي  $H$  و  $B$  في كل مكان.

يسري تيار  $I$  في مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه  $2a$  أوجد  $H$  و  $B$  في مركزه.

أوجد المجال المغناطيسي  $H$  وكثافة الفيض المغناطيسي  $B$  في مركز الحلقات التالية (i) :- حلقة دائرية مساحتها  $A$   $m^2$ . (ii) حلقة مربعة مساحتها  $A$   $m^2$ . (iii) حلقة مستطيلة أطوال أضلاعه هي  $b$  و  $2b$  ومساحتها  $A$   $m^2$ . علماً بأن هذه الحلقات تحمل تياراً في اتجاه دوران عقارب الساعة مقدار  $I$ . CW

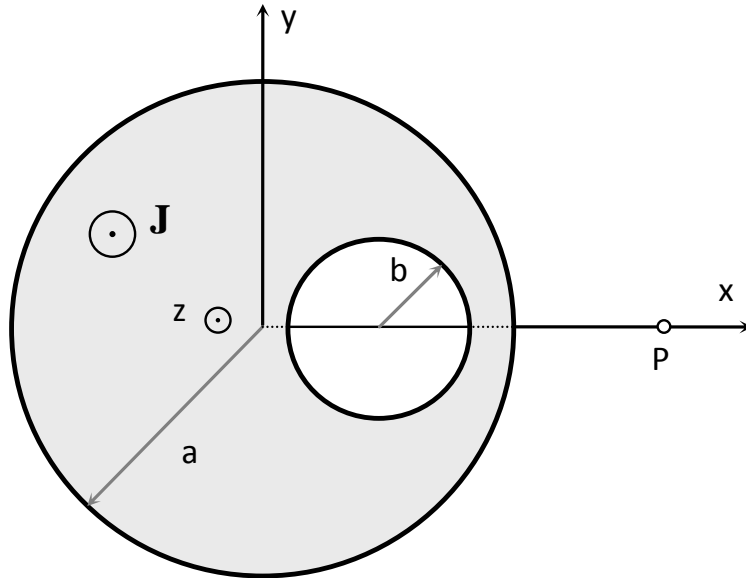
يبين الشكل رقم (١) سلكاً موصلاً طويلاً موضوعاً على طول المحور  $z$  ويحمل تياراً مقداره  $I_1$   $A$  وتم وضع حلقة مستطيلة  $(L_1 \times L_2)$  أمام هذا السلك يمر فيها تيار مقداره  $I_2$   $A$  ويبعد مركزها عن السلك مسافة  $d + L_1/2$  وبالتالي أوجد (i) - القوة ما بين السلك والحلقة. (ii) كمية الفيض المغناطيسي الناتج من التيار  $I_1$  والذي يمر في الحلقة المذكورة أعلاه. (iii) الحاثية التبادلية  $L_{12}$  بين هاتين الدائرتين.



الشكل رقم (١) سلك يحمل تياراً  $I_1$  أمام حلقة تحمل تياراً  $I_2$ .

يبين الشكل رقم (٢) موصل أسطواني نصف قطره  $a$  وعمل به ثقب بعيد عن محوره وموازيًا لمحور الموصل بنصف قطر  $b$  ( $b < a$ ). فإذا كانت كثافة التيار السطحي المار في هذا الموصل هو  $J_z = J_0$   $A/m^2$ .

أوجد المجال المغناطيسي  $\mathbf{H}$  وكثافة الفيض المغناطيسي  $\mathbf{B}$  عند أية نقطة داخل الثقب وعند النقطة  $p$ .



الشكل رقم (٢) موصل أسطواناني به ثقب ويسري فيه تيار باتجاه المحور  $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{a}_z$ .



## الحث الكهرومغناطيسي

أثبت أورستد عام ١٨٢٠ أن التيار الكهربائي يولد مجالاً مغناطيسياً، ويؤثر هذا المجال بدوره في التيارات الكهربائية أو الشحنات المتحركة في المجال بقوة مغناطيسية. وأدت حقيقة هذه العملية (توليد التيار الكهربائي لمجال مغناطيسي) بالعلماء إلى التساؤل عما إذا كان بالإمكان عكس تلك العملية، بحيث يكون بمقدور المجال المغناطيسي أن ينتج تياراً كهربائياً! وجاء الجواب على يدي هنري من أمريكا عام 1830، حيث اكتشف أن تغير التدفق المغناطيسي خلال دائرة مغلقة يؤدي إلى توليد قوة دافعة كهربائية تأثيرية (Induced Electromotive Force)، والتيار الكهربائي تأثيري (Induced Current) فيها. ولكن هنري لم ينشر نتائج اكتشافه إلا بعد أن أعلن فارادي من إنجلترا عام 1831 عن اكتشافه للقوة الدافعة الكهربائية التأثيرية المتولدة في دائرة مغلقة عندما يتغير التدفق المغناطيسي خلالها. ولذلك يُعتبر فارادي رسمياً هو مكتشف القوة الدافعة التأثيرية، لأنه أول من أعلن عنها. ولقد أدت التجارب الرائدة التي قام بها العالمان فارادي، وهنري إلى تطور المولدات الحديثة (generators) والمحولات (transformers) والمحثات (Inductors)، وغيرها.

لقد اقتصرنا دراستنا في الفصول السابقة على المجالات الساكنة،  $\vec{E}$  و  $\vec{B}$  (Static Field) أي تلك المجالات التي لا تتغير مع الزمن، وهي الحالة المعروفة بالكهروستاتيكا (Electrostatic). وكانت المعادلة الأساسية في الكهروستاتيكا هي:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (6-1)$$

ويوجد صياغة أخرى للمعادلة (6-1) بشكل تكامل، تأخذ الشكل التالي:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (6-2)$$

ولقد تم الحصول على المعادلة (6-2) بأخذ التكامل السطحي لطرفي المعادلة (6-1) ومن ثم تطبيق نظرية ستوكس لتحويل التكامل السطحي إلى خطي على النحو التالي:

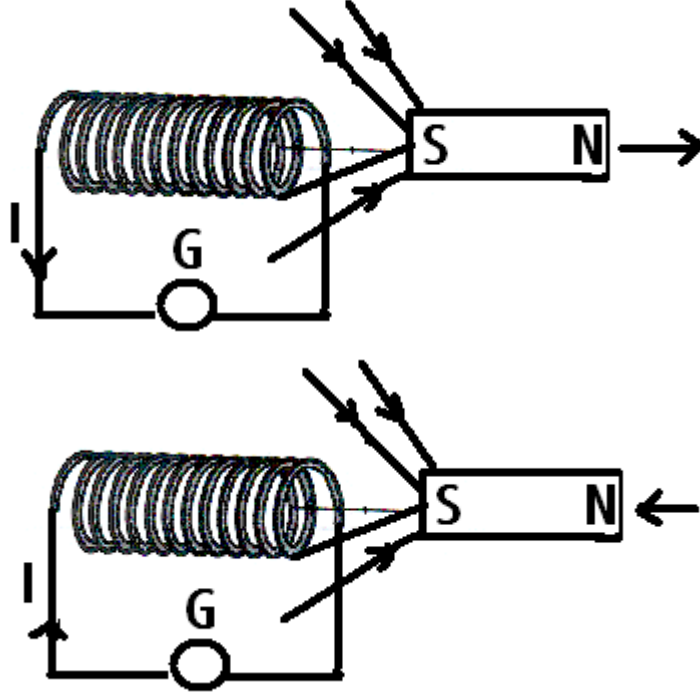
$$\begin{aligned} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} \, da &= 0 \\ \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} \, da &= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \\ \therefore \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= 0 \end{aligned}$$

أما في هذا الفصل فسنناقش حالات هذين المجالين، أنفي الذكر، في حالة اعتمادهما على الزمن. وسنتعرف على علاقات جديدة لوصف حالات عامة، وهذه العلاقات العامة تبين أن تؤول إلى الحالات الخاصة (المعادلتين (6-1) و (6-2)) في حالة عدم اعتماد  $\vec{E}$  و  $\vec{B}$  على الزمن.

:

لقد أفصح فارادي، كما أسلفنا، باكتشاف عملية لتوليد التيار الكهربائي بواسطة مجال مغناطيسي متصل مع جلفانومتر (G) ودائرة

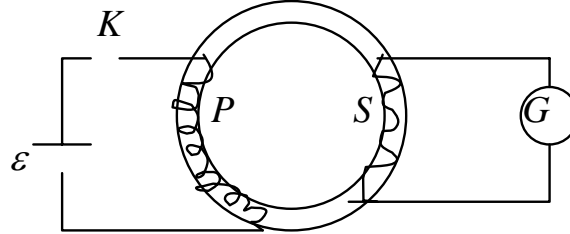
مغلقة، يحرف مؤشر الجلفانومتر كما في الشكل رقم (٦-١). ولاحظ كذلك أن تحريك المغناطيس بالاتجاه المضاد للاتجاه السابق، يحرف مؤشر الجلفانومتر بالاتجاه المعاكس. كما لاحظ عدم انحراف مؤشر الجلفانومتر عندما يكون المغناطيس ساكناً داخل الملف أو خارجه. وأطلق على هذا التأثير الذي يسبب الانحراف اسم "الحث الكهرومغناطيسي" (Electromagnetic Induction).



الشكل رقم (٦-١)

وقد فسّر فارادي ظاهرة الحث هذه بالقول "إن قوة دافعة كهربائية تتولد كلما تغير التدفق المغناطيسي خلال الملف." ويسمى التيار المتولد في الملف بالتيار التآثري (Induced Current) وتسمى القوة الدافعة

الكهربائية المتولدة في الملف بالقوة الدافعة الكهربائية التأثيرية،  
Emf (Induced Electromotive Force). كما اكتشف فارادي أن تياراً  
تأثيرياً يتولد كذلك في دارة مغلقة عندما يتغير التيار الكهربائي المار في  
دارة مجاورة [انظر الشكل رقم (٦-٢)] دون تحريك أي من الدارتين.



الشكل رقم (٦-٢)

ويُفسر هذا التأثير بأن المجال المغناطيسي الناتج عن مرور التيار في  
الملف الابتدائي P يتغير كلما أغلقت الدارة الابتدائية أو فتحت بواسطة  
المفتاح K. ويسبب تغير المجال تغير التدفق الذي يقطع الملف الثانوي S مما  
يؤدي إلى توليد تيار تأثيري فيه، يعمل على حرف الجلفانومتر G.  
ويمكن تلخيص تجارب فارادي السابقة بالقانون التالي:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (6-3)$$

وتُعرف المعادلة (6-3) بقانون فارادي في الحث (Faraday's Law of  
Induction). وتشير المعادلة (6-3) إلى أنه إذا تغير التدفق المغناطيسي  
( $\Phi$ ) خلال دارة كهربائية، بغض النظر عن الطريقة التي يتغير بها، فإن  
هذا التغير مع الزمن يولد قوة دافعة كهربائية  $\varepsilon$ .

وهناك صياغة أخرى لقانون فارادي يمكن إيجادها على النحو  
التالي: تُعرف القوة الدافعة الكهربائية  $\varepsilon$  (أو  $\varepsilon_{mf}$ ) حول دارة، بالعلاقة:



$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (6-4)$$

ويعطي التدفق المغناطيسي  $\Phi$  بالعلاقة:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da \quad (6-5)$$

وبالتعويض عن  $\varepsilon$  و  $\Phi$  في المعادلة (6-3)، نحصل على:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da$$

وإذا كانت الدارة الكهربائية متماسكة (rigid) وثابتة في موضعها (stationary)، فإن المشتقة الأولى بالنسبة للزمن في المعادلة السابقة، يمكن نقلها إلى داخل التكامل حيث تصبح مشتقة جزئية. كما يمكن استخدام نظرية ستوكس لتحويل التكامل الخطي للمجال الكهربائي إلى تكامل سطحي. وبهذا يصبح شكل المعادلة السابقة على النحو التالي:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} da = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} da \quad (6-6)$$

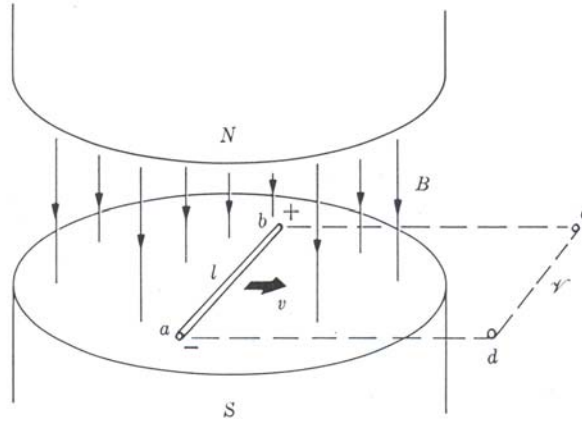
وبما أن النتيجة السابقة تصح لجميع السطوح، فإننا نستنتج أن:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6-7)$$

وتمثل المعادلة (6-7) الصيغة التفاضلية لقانون فارادي في الحث. وتشير هذه المعادلة (6-7) إلى أن  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  لا يساوي صفرًا دائماً. ولكن  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  يساوي صفرًا للمجالات الاستاتيكية، أي التي لا تعتمد على الزمن. كما تمثل هذه المعادلة (6-7) الحالة العامة للمجالين  $\vec{E}$  و  $\vec{B}$ . ونلاحظ منها أيضاً أنها معادلة تفاضلية تربط بين المشتقات الفضائية (Space) للمجال الكهربائي  $\vec{E}$  عند نقطة معينة مع معدل تغير المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  مع الزمن عند نفس النقطة.

إن الإشارة السالبة في قانون فارادي [المعادلة (6-3) والمعادلة (6-4)]: تشير إلى أن القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية تكون دائماً باتجاه يعمل على معاكسة التغير الذي تسبب في توليدها، ويُعرف هذا عادة بقانون لنز (Lenz's law). فإذا أردنا أن نزيد التدفق المغناطيسي خلال دارة مغلقة، بأية وسيلة كانت، فإن القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية ستحاول تكوين تيار تأثيري يسري باتجاه يعمل على إنقاص أية زيادة في ذلك التدفق. وإذا أردنا إنقاص التدفق المغناطيسي فإن القوة الدافعة الكهربائية ستولد تياراً تأثيرياً يسري باتجاه يعمل على زيادة ذلك التدفق للحفاظ عليه من النقصان. وحالة القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية هذه في الحث تشبه قوة الاحتكاك في الحركة. حيث إن اتجاه قوة الاحتكاك يكون دائماً باتجاه معاكس للحركة. وللتبصر بقانون لنز، انظر المثال (3-5).

وللتبصر أيضاً بقانون فارادي، دعنا نناقش المثال التالي: افترض سلكاً معدنياً طوله  $L$  يتحرك بسرعة  $\vec{v}$  باتجاه عمودي على طوله، بمنطقة مجال مغناطيسي  $\vec{B}$  عمودي على المستوى المتحرك فيه السلك، كما في الشكل رقم (3-6).



الشكل رقم (3-6)

ونتيجة لحركة السلك فإن الشحنات الحرة فيه ( $q$ ) ستتأثر بقوة لورنز. أي سيؤثر في كل شحنة قوة كهربائية وقوة مغناطيسية، محصلتهما عبارة عن القوة  $\vec{F}$ ، التي تعطى بالعلاقة:

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (6-8)$$

ويعمل الحد  $q \vec{v} \times \vec{B}$  على تحريك الشحنات الموجبة نحو نهاية السلك  $b$  والشحنات السالبة نحو النهاية  $a$  ويؤدي ذلك إلى توليد مجال كهربائي  $E$ . وتستمر حركة الشحنات إلى جانبي السلك إلى أن تتعادل القوة الناتجة عن المجال  $\vec{E}$  مع القوة المغناطيسية  $q \vec{v} \times \vec{B}$ ، وحينها تصبح الشحنات في حالة مستقرة (Steady State). أي أن:

$$qE = qvB$$

ومنها، فإن:

$$E = vB \quad (6-9)$$

فإذا كان المجال  $\vec{B}$  منتظماً (طبعاً السرعة  $\vec{v}$  ثابتة)، فإن  $\vec{E}$  ستكون ثابتة على امتداد السلك وذلك حسب المعادلة (6-9). ويعطى فرق الجهد  $\Delta \phi$  بين طرفي السلك  $ab$  في هذه الحالة، بالعلاقة:

$$\Delta \phi = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = EL \quad (6-10)$$

فإذا رمزنا لفرق الجهد  $\Delta \phi$  بالرمز  $V$ ، فإن:

$$V = EL$$

وبالتعويض عن  $E$  في المعادلة السابقة من المعادلة (6-9)، نحصل على:

$$V = BLv \quad (6-11)$$

وتمثل  $v$  في المعادلة (6-11) القوة الدافعة الكهربائية المتولدة في السلك نتيجة لحركة السلك في مجال مغناطيسي  $\vec{B}$  ثابت مع مرور الزمن. وبما

أن  $\vec{B}$  ثابتة مع مرور الزمن، فإن الحالة التي تم مناقشتها شبيهة بحالات الكهروستاتيكا. أي أن المعادلتين التاليتين تنطبقان على هذه الحالة، وهما:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= 0\end{aligned}$$

والتكامل الأخير لا يعتمد على المسار. فإذا سلكنا المسار  $abcd$ ، المبين في الشكل رقم (٦-٣)، والممتد جزء منه خارج المجال، فإن  $V$  عبارة عن فرق الجهد عبر المسار  $bcda$ ، وإذا كان السلكان  $bc$  و  $da$  موصلين تماماً (فرق الجهد بين طرفيهما صفراً) فإن الجهد بين النقطتين  $c$  و  $d$ ، خارج المجال المغناطيسي، سيساوي  $v$ .

ويمكن كتابة المعادلة (٦-١١) بشكل عام باستخدام المتجهات

على النحو التالي:

لنفرض أن  $\vec{v}$  اختيرت باتجاه معين بالنسبة للطول  $\vec{L}$ . لذا فإن مركبة  $\vec{v}$  العمودية على  $\vec{L}$  هي الوحيدة التي تساهم في فرق الجهد  $V$ . وبهذا تتناسب  $V$  طردياً مع  $\vec{L} \times \vec{v}$ . وباختيار  $\vec{B}$  باتجاه معين أيضاً، فإن المركبة العمودية للمجال  $\vec{B}$  على المستوى المؤلف من  $\vec{v}$  و  $\vec{L}$  هي التي تساهم في فرق الجهد  $V$ . وبالتالي فإن:

$$V = \vec{B} \cdot \vec{L} \times \vec{v} \quad (6-12)$$

ونظراً لأن  $V$  تولدت من جراء حركة أجزاء من الدارة الكهربائية في منطقة تأثير المجال المغناطيسي. فإنه يطلق أحيانا على الجهد بالقوة الدافعة الكهربائية الحركية. وقبل الانتهاء من هذا المثال، نود النظر إليه من وجهة أخرى، وهي أننا سنحرك المجال المغناطيسي بتحريكنا للمغناطيس

إلى اليسار بسرعة  $\vec{v}$  تاركين السلك ساكناً في مكانه. وحقيقة أننا سنحصل على نفس النتائج السابقة ولكن بتفسير مختلف.

بما أن السلك ساكن ( $v = 0$ ) فإن القوة المغناطيسية المؤثرة فيه تساوي صفراً ( $\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B} = 0$ ). ولكن المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  في هذه الحالة يعتمد على الزمن، حيث تتغير قيمته من  $B$  إلى الصفر عند كل نقطة من نقاط المسار المغلق  $abcd$  لحظة اجتيازها المجال المغناطيسي. وتكون القوة على الشحنات الحرة داخل السلك في حالة الاستقرار (Steady State) تساوي صفراً. أي أن:

$$\vec{F} = q \vec{E} = 0 \quad [\vec{E} = 0]$$

حيث  $\vec{E}$ : المجال الكهربائي الكلي المحصل داخل السلك. ولكن  $\vec{E}$  أعلاه تساوي صفراً، بسبب تساوي المجال  $\vec{E}_1$  الناتج عن فصل الشحنات الموجبة عن السالبة داخل السلك مع المجال  $\vec{E}_2$  الناتج عن تغير المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  مع الزمن، وتعاكسهما بالاتجاه. أي أن:

$$\vec{E} = 0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (6-13)$$

وبالتعويض عن المجال الكهربائي  $\vec{E}_2$  في المعادلة (6-7)، فإن تلك المعادلة تؤول إلى:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_2 = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6-14)$$

وإذا افترضنا مرة أخرى مساراً مغلقاً مثل  $abcd$ ، كما في الشكل رقم (٦-٣)، فإن:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= 0 + V \end{aligned}$$

ونلاحظ تلاشي الحد الأول على الطرف الأيمن من المعادلة السابقة بسبب تلاشي المجال  $\vec{E}$  المحصل داخل السلك، أما الحد الثاني عبر المسار bcda فقد أوجدناه سابقاً بأنه يساوي  $V$  ومن المعادلة السابقة والمعادلة (6-3)، نجد أن:

$$\varepsilon = V = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (6-15)$$

ونقاشنا السابق، من وجهتي نظر مختلفة، دليل على أن المعادلة العامة (المعادلة (6-7)) لـف (Curl) صالحة للاستخدام سواء أكان النظام ساكناً أم متحركاً.

-

لاحظنا من خلال دراستنا لقانون فارادي أن تدفق المجال المغناطيسي خلال دارة كان ناتجاً عن مصدر خارج تلك الدارة أو عن مغناطيس خارجي. ومن الممكن أن ينتج التدفق المغناطيسي خلال دارة نتيجة مرور تيار كهربائي فيها. فإذا تغير التيار الكهربائي المار في الدارة نفسها، فإن المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  الناتج عنه يتغير. ويصحب ذلك تغير في تدفق المجال المغناطيسي  $\Phi$  خلال الدارة. ويؤدي تغير  $\Phi$  إلى توليد (احتثات) قوة دافعة كهربية  $\varepsilon$  في الدارة نفسها، تعطى وفقاً لقانون فارادي، بالعلاقة:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$$

وحيث إن:

$$d\Phi \propto dB \quad (\text{حسب قانون التدفق})$$

$$dB \propto dI \quad (\text{حسب قانون بيوت وسافارت})$$

$$\therefore d\Phi \propto dI$$

أي أن:

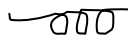
$$d\Phi = L dI \quad (6-16)$$

ومنها فإن:

$$L = \frac{d\Phi}{dI} \quad (6-17)$$

وتمثل L مقداراً ثابتاً يعرف باسم المحأئة الذاتية (Self Inductance) وتقاس

$$1H = \frac{1Wb}{1A} \text{ حيث إن } H \text{ بالرمز لها بالرمز } H.$$

ويطلق على الملف أو الدارة التي تمتلك خاصية الاحتثات أو الحث (Induction) اسم المحث (Inductor)، وهو ثالث عنصر أساسي في الدارات الكهربائية بالإضافة إلى المقاومة R والمكثف C. وكما أن هناك رمزاً للمقاومة R وللمكثف C في الدارات الكهربائية فإن هناك رمزاً للمحثات L، ويرمز لها بالرمز  .

تؤدي المغناطيسية دوراً هاماً ومشابهاً للدور الذي تلعبه المواسعة C للمكثفات في توليد مجالات كهربائية. ويمكن اختزان الطاقة المغناطيسية في المحثات مثلما تخزن الطاقة الكهربائية في المكثفات. وتعتمد قيمة المحأة L على الشكل الهندسي للمحث ونوع المادة الموجودة فيه، تماماً كما هو الحال بالنسبة للمكثفات.

ويمكننا إيجاد القوة الدافعة الكهربائية المحتثة  $\mathcal{E}$  ، على النحو

التالي: نقسم طرفي المعادلة (6-16) على  $dt$  ، فنحصل على:

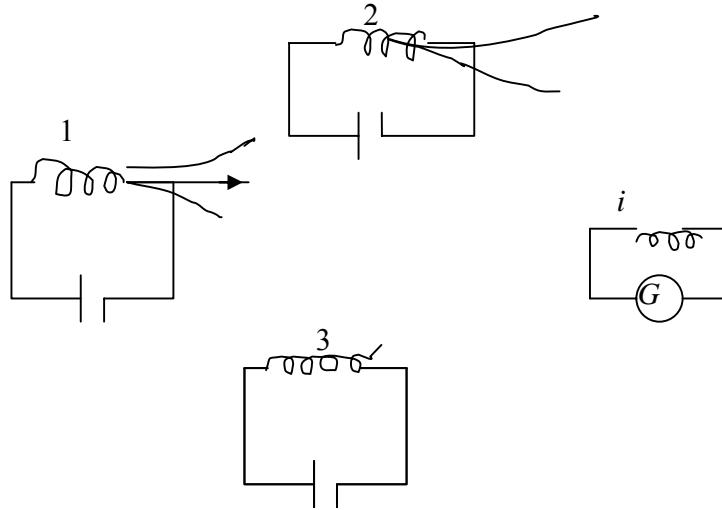
$$\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

ولكن:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\therefore \varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \quad (6-18)$$

عند وضع ملف بالقرب من ملف آخر، فإن مرور تيار كهربائي متغير في أحدهما يولد قوة دافعة كهربائية  $\varepsilon$  في الملف الآخر. وفي حالة وجود عدد من الملفات بالقرب من الملف، فمثلاً كما في الشكل رقم (٦-٤)، فإن تغيير التيارات المارة في الملفات يولد  $\varepsilon$  في الملف، نتيجة لتغير التدفق المغناطيسي في الملف  $i$ .



الشكل رقم (٦-٤)

ويعطى التدفق  $\Phi$  في الملف  $i$  بالعلاقة:

$$\Phi_i = \Phi_{i1} + \Phi_{i2} + \dots + \Phi_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}$$



- حيث:  $\Phi_{i1}$  التدفق المغناطيسي خلال الدارة  $i$  والناتج عن الدارة 1.  
 $\Phi_{i2}$  التدفق المغناطيسي خلال الدارة  $i$  والناتج عن الدارة 2.  
 $\Phi_{in}$  التدفق المغناطيسي خلال الدارة  $i$  والناتج عن الدارة  $n$ .  
وهكذا.

وتعطى القوة الدافعة الكهربائية المحتثة  $\varepsilon_i$  في الدارة  $i$ ، بالعلاقة:

$$\varepsilon_i = - \frac{d \Phi_i}{d t} = - \frac{d}{d t} \left[ \sum_{j=1}^n \Phi_{ij} \right] = - \sum_{j=1}^n \frac{d}{d t} \Phi_{ij} \quad (6-19)$$

وإذا كانت كل دارة من الدارات الكهربائية المبينة في الشكل رقم (٦ - ٤)، صلبة (rigid) وثابتة (Stationary) فإن التغيرات التي يمكن أن تحدث في  $\Phi_{ij}$  مع مرور الزمن هي تلك التغيرات التي تنشأ عن التغيرات في التيارات. لذا فإن:

$$\frac{d \Phi_{ij}}{d t} = \frac{d \Phi_{ij}}{d I_j} \cdot \frac{d I_j}{d t} \quad (6-20)$$

وبما أن:

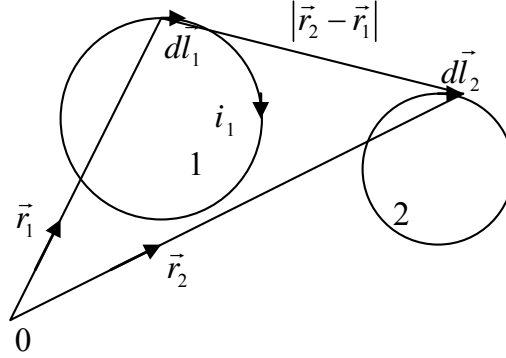
$$\frac{d \Phi_{ij}}{d t} \propto \frac{d I_j}{d t}$$

فإن المعاملات  $\frac{d \Phi_{ij}}{d I_j}$  تُعد ثوابتاً. أي أن:

$$M_{ij} = \frac{d \Phi_{ij}}{d I_j} \quad ; \quad i \neq j \quad (6-21)$$

وتعرف  $M_{ij}$  بالمحاثة المتبادلة (Mutual Inductance) بين الدارتين  $i$  و  $j$ .  
وسيتضح لنا فيما بعد أن  $M_{ij} = M_{ji}$ . أما  $M_{ii}$  فتساوي  $L_i$  وهي ما أطلقنا عليها سابقاً تسمية المحاثة الذاتية (Self Inductance).

بيناً كيفية حساب المُحاثّة الذاتية والمتبادلة، بطريقة غير مباشرة، وذلك من معرفتنا للنسبة  $\frac{\Delta \Phi}{\Delta I}$ . ونود الآن التعرف على كيفية حسابهما بطريقة مباشرة من معرفتنا للشكل الهندسي للمحثات.



الشكل رقم (٦-٥)

لحساب المحاثّة المتبادلة  $M$ ، افترض دارتين كما في الشكل رقم (٥-٦). فعندما يمر تيار كهربائي  $I_1$  في الدارة 1، فإنه يولد مجالاً مغناطيسياً  $\vec{B}_1$  يمتد إلى المنطقة التي تتواجد بها الدارة 2. وعند تغيير هذا التيار، فإنه يولد قوة دافعة كهربائية تأثيرية  $\mathcal{E}_2$  في الدارة 2، مقدارها يعطى بالعلاقة:

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d \Phi_1}{d t} \quad (6-22)$$

ولكن:

$$\Phi_1 = \int \vec{B}_1 \cdot \hat{n} d S_2 \quad (6-23)$$

ويمكن إيجاد  $\vec{B}_1$  من الجهد المغناطيسي المتجه  $\vec{A}_1$ ، من العلاقة التالية:

$$\vec{B}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 \quad (6-24)$$

وبالتعويض عن  $\vec{B}_1$  من المعادلة (6-24) في المعادلة (6-23)، وعن  $\Phi_1$  في المعادلة (6-22)، نحصل على:

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d}{dt} \int_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_1) \cdot \hat{n} dS_2$$

وباستخدام نظرية ستوكس لتحويل التكامل السطحي السابق إلى تكامل خطي، فإننا نحصل على:

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d}{dt} \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 \quad (6-25)$$

ولكننا أوجدنا علاقة في الفصل السابق لحساب  $\vec{A}_1$ ، وكانت:

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \frac{I_1 d\vec{\ell}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

وبالتعويض عن  $\vec{A}_1$  من المعادلة السابقة في المعادلة (6-25)، نحصل على:

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d}{dt} \oint_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \frac{I_1 d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \frac{dI_1}{dt}$$

ولكن:

$$\mathcal{E}_2 = - M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

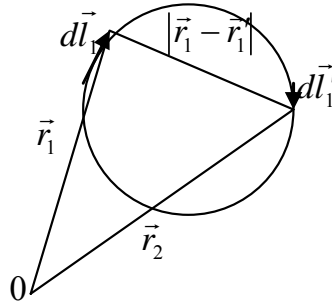
وبمقارنة المعادلتين السابقتين ببعضهما، نجد أن:

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (6-26)$$

وتعرف العلاقة (6-26) باسم "صيغة نيومان" لحساب المحثة المتبادلة بين دارتين. وهذه العلاقة تمكننا من حساب المحثة بطريقة مباشرة من معرفتنا للشكل الهندسي للدارتين وثابت إنفاذية الوسط للمجال المغناطيسي.

وبنفس الطريقة التي تم بها اشتقاق المحثة المتبادلة بين دارتين، يمكننا اشتقاق المحثة الذاتية لدائرة واحدة لتكن الدارة 1 في الشكل (6-5)، وذلك بأخذ عنصري الطول  $d\vec{\ell}_1$  و  $d\vec{\ell}_2$  على نفس الدارة كما في الشكل رقم (6-6). سنجد أن:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'_1|} \quad (6-27)$$



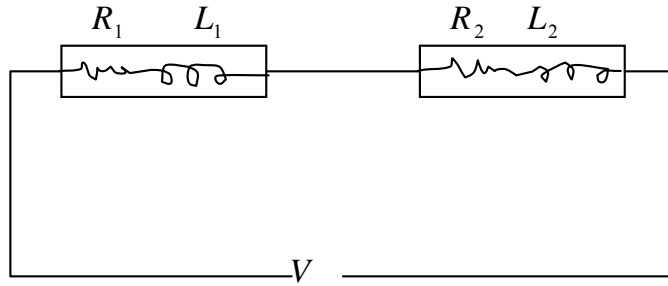
الشكل رقم (6-6)

وتجدر الإشارة هنا إلى أن تطبيق العلاقتين (6-26) و (6-27) صعب في العادة، باستثناء الحالات التي تكون فيها الدارات الكهربائية ذات أشكال هندسية بسيطة. إلا أن أهمية هاتين المعادلتين تكمن في دراسة القوى والعزوم التي تؤثر بها إحدى الدارات على الأخرى. وهذا ما سنتعرض إليه في البند القادم.

-

نحتاج أحياناً لتوصيل المحثات على التوالي وعلى التوازي، كما هو الحال في المقاومات والمكثفات. و لهذا ينبغي علينا معرفة نتائج هذا التوصيل.

وفي الحقيقة أن هناك مقاومة لكل محث، وهي عبارة عن مقاومة السلك المصنوع منها المحث. ولهذا فإن توصيل أي محث يجب أن يتضمن دائماً مقاومة متصلة معه على التوالي، إلا إذا كانت تلك المقاومة مهملة. لنفرض دائرة التوالي المبينة في الشكل رقم (٦-٧) وهي عبارة عن توصيل محثين مع بعضهما على التوالي.



الشكل رقم (٦-٧)

و بتطبيق قانون كيرشوف لفروق الجهد على الدارة نحصل على:

$$V = IR_1 - \varepsilon_1 + IR_2 - \varepsilon_2 \quad (6-28)$$

حيث  $I$ : التيار اللحظي المار في الدارة.  $\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية في المحث الأول والثاني، على الترتيب.

$V$ : فرق الجهد بين النقطتين  $a$  و  $b$ .

ولكن:

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt} \quad (6-29)$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt} \quad (6-30)$$

حيث  $M$ : المحاثة المتبادلة بين المحثين الأول والثاني وهي تساوي  $M = M_{12} = M_{21}$ . وبتعويض  $\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  من المعادلتين (6-29) و (6-30) على الترتيب في المعادلة (6-28)، نحصل على:

$$V = IR_1 + L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt} + IR_2 + L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$$

ومنها، فإن:

$$V = (R_1 + R_2) I + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt} \quad (6-31)$$

ونلاحظ من المعادلة (6-31) أنها تمثل دائرة مؤلفة من مقاومة مركبة من مقاومتين  $(R_1 + R_2)$  متصلتين على التوالي، ومن مَحْث مركب من محثين مقدار المحاثة لهما  $(L_1 + L_2 + 2M)$ ، وهذا المحث المركب متصل على التوالي مع المقاومة المركبة. وتكون عادة المحاثة الكلية مساوية  $L_1 + L_2 + 2M$  للازدواج الموجب، أي عندما يكون  $I_1$  (التيار في المحث الأول) و  $I_2$  (التيار في المحث الثاني) باتجاه واحد وتساوي  $L_1 + L_2 - 2M$  للازدواج السالب، أي عندما يكون  $I_1$  و  $I_2$  باتجاهين متضادين.

ويمكن وصف المحاثة المتبادلة  $M$ ، بالعلاقة:

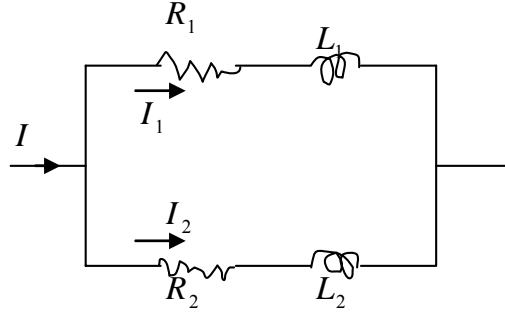
$$M = K \sqrt{L_1 L_2} \quad ; \quad -1 \leq K \leq 1 \quad (6-32)$$

ولهذا تأخذ المحاثة المكافئة أو الفعالة  $L_{\text{eff}}$  (Effective Inductance)

لدائرة التوالي الشكل التالي:

$$L_{\text{eff}} = L_1 + L_2 + 2K \sqrt{L_1 L_2} \quad ; \quad -1 \leq K \leq +1 \quad (6-33)$$

ونلاحظ من المعادلة (6-33) أن تغيير  $K$  يعمل على تغيير قيمة المحاثة الفعالة  $L_{eff}$ . وهذه هي الوسيلة التي كانت مستخدمة في أجهزة الراديو التي صُنعت قديماً لتغيير قيمة المحاثة وذلك للحصول على ترددات رنين (Resonance Frequency) مختلفة، حيث تمثل  $K$  كما ذكرنا سابقاً معامل الازدواج (Coupling Coefficient).



شكل رقم (٦-٨)

أما التوصيل على التوازي للمحثات فهو ليس بسهولة التوصيل على التوالي، لأن سلوك الدارة الكهربائية المبينة في شكل رقم (٦-٨) لا يشبه سلوك دارة كهربائية مكونة من مجموعات مؤلفة من  $L$  و  $R$  متصلة على التوالي، كما في الشكل رقم (٦-٧). ولهذا لا يصح القول بأن المحاثة الفعالة والمقاومة الفعالة هي دوال (function) للكميات  $L_1$  و  $L_2$  و  $R_1$  و  $R_2$ . وفي هذه الحالة ينتج:

$$\left. \begin{aligned} V &= L_1 \frac{d I_1}{d t} + M \frac{d I_2}{d t} \\ V &= L_2 \frac{d I_2}{d t} + M \frac{d I_1}{d t} \end{aligned} \right\} \quad (6-34)$$

بحل المعادلتين (6-34)، بحيث نتخلص أولاً من  $\frac{d I_2}{d t}$  ومن ثم نتخلص

من  $\frac{d I_1}{d t}$ ، فنحصل على:

$$V(L_2 - M) = (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_1}{dt}$$

$$V(L_1 - M) = (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_2}{dt}$$

وبجمع المعادلتين السابقتين، نحصل على:

$$V(L_1 + L_2 - 2M) = (L_1 L_2 - M^2) \left( \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \right) = (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI}{dt}$$

حيث:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt}$$

$$\therefore V = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt} \quad (6-35)$$

ونلاحظ من المعادلة (6-35) أنها تمثل دائرة مَحَاطَتِهَا الفعَّالة  $L_{\text{eff}}$ ،

ومقدارها يعطى بالعلاقة:

$$L_{\text{eff}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad (6-36)$$

ومرة أخرى، فإن إشارة  $M$  تعتمد على طريقة توصيل المحثات، كما هو

الحال في التوصيل على التوالي.

( - )

وضعت عروة تيار مستوية مساحتها  $A \hat{z}$  في مجال مغناطيسي  $\vec{B}$

بحيث كان مستواها متعامداً مع اتجاه المجال، كما في الشكل رقم

(٦-٩). فإذا علمت أن المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  يعطى بالعلاقة:

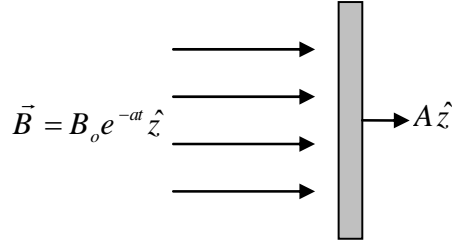
$$\vec{B} = B_0 e^{-at} \hat{z}$$

حيث:  $B_0$  و  $a$  مقداران ثابتان مع الزمن  $t$ .



أوجد القوة الدافعة الكهربائية المتولدة في العروة في أية لحظة

زمنية  $t$ .



الشكل رقم (٦- ٩)

الحل:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

ولكن:

$$\begin{aligned} \Phi &= \vec{B} \cdot \vec{A} = B_0 e^{-at} \hat{z} \cdot A \hat{z} \\ &= A B_0 e^{-at} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{E} = - \frac{d}{dt} (A B_0 e^{-at}) = a A B_0 e^{-at}$$

ونلاحظ من المعادلة السابقة أن  $\mathcal{E}$  تضمحل أسياً (Exponentially) بمرور الزمن. كما نلاحظ أن أكبر قيمة لها تكون عند اللحظة  $t = 0$ ، حيث تعطي قيمتها  $\mathcal{E}_{\max}$ ، بالمعادلة:

$$\mathcal{E}_{\max} = a A B_0$$

( - )

ملف دائري يوصف بالمعادلة  $x^2 + y^2 = 16 \text{ m}^2$  موضوع في

المستوى  $xy$  وفي المركز، حيث يُعطى المجال المغناطيسي بالعلاقة:

$$\vec{B} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \cos \omega t \hat{z} \quad (\text{تسلا})$$

أوجد القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية الكلية المتولدة في الملف.

**الحل:**

بما أن الملف موضوع في المستوى  $x, y$ ، فإن عنصر المساحة  $da$

يكون باتجاه المحور  $z$ . أي أن:

$$da = dx dy \hat{z} = dx dy \hat{n} \quad [\hat{n} = \hat{z}]$$

من المعادلة (6-6)، فإن  $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_s -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} da \\ &= -\int_s \frac{\partial}{\partial t} \left[ 2\sqrt{x^2 + y^2} \cos \omega t \hat{z} \cdot dx dy \hat{z} \right] \\ \mathcal{E} &= 2\omega \sin \omega t \iint \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \end{aligned}$$

ولإجراء التكامل السابق يُفضل تحويله إلى نظام المحاور الأسطوانية.

$$dx dy = da = r dr d\phi$$

$2\pi R$

$$\therefore \mathcal{E} = 2\omega \sin \omega t \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 dr d\phi$$

$$= 2\omega \sin \omega t \left[ \phi \right]_0^{2\pi} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R = 2\omega \sin \omega t (2\pi) \left( \frac{R^3}{3} \right)$$

وبما أن الملف الدائري يوصف بالعلاقة:

$$x^2 + y^2 = 16 = R^2$$

$$\therefore R = 4 \text{ m} \quad (\text{نصف قطر الملف})$$

وبالتعويض عن  $R$ ، نجد أن  $\mathcal{E}$  تساوي

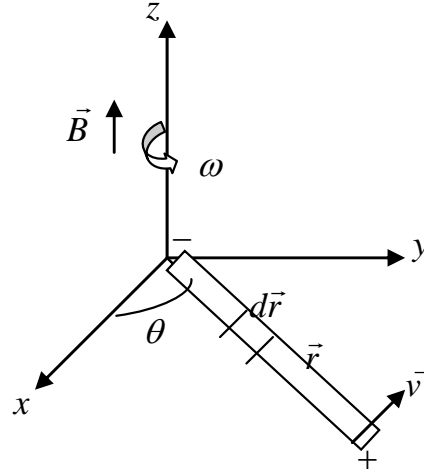
$$\varepsilon = 2 \omega \sin \omega t (2 \pi) \left( \frac{4^3}{3} \right) = 268 \omega \sin \omega t$$

$$\therefore \varepsilon = 268 \omega \sin \omega t$$

ونلاحظ من هذا المثال أن القوة الدافعة الكهربائية  $\varepsilon$  تعتمد على الزمن وهي جيبيية التغير (sine wave).

( - )

قضيب معدني طوله 1 m يدور حول محور عمودي عليه ويمر بإحدى نهايتي القضيب، بسرعة زاوية  $\omega$  قدرها 12 rad / s. كما في الشكل رقم (٦-١٠) فإذا علمت أن مستوى الدوران عمودي على مجال مغناطيسي منتظم قدره 0.3 T، أوجد  $\varepsilon$  المحتثة بين طرفي القضيب.



الشكل رقم (٦-١٠)

الحل:

نظراً لحركة القضيب المعدني، فإن  $\varepsilon$  المتولدة هي حركية (motional Emf) وتعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (1)$$

وتعطي القوة التي تقوم على فصل الشحنات الموجبة عن السالبة، بالعلاقة:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

ولكن:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \hat{\theta}$$

$$\vec{B} = B \hat{z}$$

$$\therefore \vec{F} = q \omega r \hat{\theta} \times B \hat{z} = q \omega r B \cdot \hat{\theta} \times \hat{z}$$

ولكن:

$$\hat{\theta} \times \hat{z} = \hat{r}$$

$$\therefore \vec{F} = q \omega r B \hat{r} \quad (2)$$

ولكن:

$$q \vec{E} = -q \vec{v} \times \vec{B} = -q \omega r B \hat{r}$$

$$\therefore \vec{E} = -\omega r B \hat{r} \quad (3)$$

بالتعويض عن  $\vec{E}$  من المعادلة السابقة وعن  $d\vec{\ell} = d\vec{r}$  في المعادلة (1)،

نحصل على:

$$\xi = \int_0^{\ell} -\omega r B \hat{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{2} \omega B r^2 \Big|_0^{\ell}$$

$$\therefore \xi = -\frac{1}{2} \omega B \ell^2$$

$$|\xi| = \frac{1}{2} \times 12 \times 0.3 \times 0.3^2 = 1.8 \text{ V}$$

( - )

يتحرك سلك معدني مستقيم طوله 1 m على امتداد المحور بحيث ينطبق عليه، بسرعة  $\hat{k} \left( \frac{m}{s} \right) - \hat{x} + 3 \hat{y} - 2$  في منطقة يؤثر بها مجال مغناطيسي  $(T) \hat{x} - 3 \hat{y} - 2$ . أوجد  $\mathcal{E}$  المتولدة بين طرفي السلك.

الحل:

تعطى  $\mathcal{E}$  بالعلاقة:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \vec{B} \cdot \vec{\ell} \times \vec{v} \\ &= (2 \hat{x} - 3 \hat{y}) \cdot \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (2 \hat{x} - 3 \hat{y}) \cdot (0 \hat{x} + 2 \hat{y} + 3 \hat{z}) = 0 - 6 + 0 = -6 V \end{aligned}$$

( - )

أوجد المحاثة الذاتية L للملف لولبي طويل مساحة مقطعه A وطوله  $\ell$  ويحتوي على n لفة لكل وحدة طول.

الحل:

لحساب L، نتخيل مرور تيار I في الملف، ثم نحسب  $\Phi$  الناتجة عن هذا التيار، وأخيراً نعوض في المعادلة (6-17) للحصول على L.

$$\Phi' = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = B A = \mu_0 n I A$$

(عوضنا عن  $B = \mu_0 n I$ ).

والمعادلة أعلاه تمثل التدفق في كل لفة من لفات الملف اللولبي (باستثناء القليلة منها الواقعة عند نهايتي الملف). أما التدفق الكلي في الملف فيساوي

$$\Phi = (n \ell) \Phi' = \mu_0 n^2 I A \ell$$

$$\therefore L = \frac{d\Phi}{dI} = \mu_0 n^2 A \ell$$

ونلاحظ من هذا المثال أن  $L$  تعتمد على طول الملف  $\ell$  ومساحة مقطعه  $A$ . أي تعتمد على الشكل الهندسي للملف. كما تعتمد  $L$  على ثابت إنفاذية الوسط ( $\mu_0$ ) للمجال المغناطيسي ولا تعتمد بأي حال من الأحوال على التيار  $I$  الذي تخيلناه بداية يمر في الملف وينتج  $\Phi$ .

( - )

ملف لولبي طوله 50 cm ومساحة مقطعه  $5 \text{ cm}^2$  ويحتوي على 1000 لفة، ملفوفة على قالب حديدي ثابت إنفاذيته  $3500 \mu_0$ . أوجد مُحادثته الذاتية  $L$  وتأثير القالب الحديدي على المحادثة.

**الحل:**

تعطى المحادثة الذاتية  $L_0$  لملف ملفوف على قالب بداخله فراغ، من نتيجة المثال السابق بالعلاقة:

$$L_0 = \mu_0 n^2 A \ell \quad (1)$$

ولكن لف الملف على قالب حديدي يعمل على زيادة التدفق بنسبة  $K_m$ ، حيث:

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{3500 \mu_0}{\mu_0} = 3500$$

$$\therefore L = \mu n^2 A \ell \quad (2)$$

من (1)، (2)، نجد أن:

$$L = \mu n^2 A \ell = \mu_0 K_m \mu_0 A \ell = K_m L_0$$

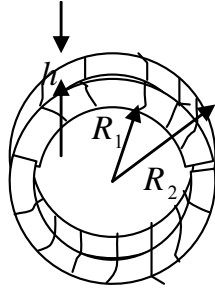
$$L = K_m L_0 \quad (3)$$

$$= 3500 \times 4 \pi \times 10^{-7} \times \left( \frac{1000}{0.50} \right)^2 \times 5 \times 10^{-4} \times 0.5 = 4.396 \text{ H}$$

$$= 4396 \text{ H}$$

( - )

ملف حلقي (Toriod) يحتوي على  $N$  لفة. نصف قطره الداخلي  $R_1$  والخارجي  $R_2$ ، ومقطعه على شكل مستطيل ارتفاعه  $h$ . كما في الشكل رقم (٦-١١). احسب محاثته الذاتية  $L$ .



الشكل رقم (٦-١١).

الحل:

لنتخيل مرور تيار في الملف الحلقي مقداره  $I$ . فإن المجال المغناطيسي

على بعد  $r$  من مركز الملف يساوي:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2 \pi r} ; R_2 \geq r \geq R_1$$

ثم نحسب التدفق  $\Phi'$  خلال كل لفة من لفات الملف، على النحو التالي:

$$\Phi' = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int \frac{\mu_0 N I}{2 \pi r} \hat{\theta} \cdot \hat{n} h dr$$

ولكن  $\hat{\theta} = \hat{n}$

$$\therefore \Phi' = \frac{\mu_0 N I h}{2 \pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \mu_0 \frac{N I h}{2 \pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

أما التدفق الكلي  $\Phi$  في الملف فيساوي:

$$\Phi' = N \Phi = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2 \pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

ولكن:

$$L = \frac{d \Phi}{d I}$$

$$\therefore L = \frac{d}{d I} \left( \frac{\mu_0 N^2 I h}{2 \pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) = \frac{\mu_0 N^2 h}{2 \pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

( - )

دائرة كهربائية مكونة من قشرتين أسطوانيتين نصف قطريهما  $R_1$  و  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) وطولهما المشترك  $l$ ، وصلتا بألواح مسطحة النهاية بحيث إن الشحنة تتساب من إحدى القشرتين لتعود إلى الأخرى باتجاهين متضادين. ما قيمة المحاثة الذاتية لهذه الدائرة؟

**الحل:**

بتطبيق قانون أمبير في جميع المناطق، نجد أن:

$$\vec{B} = 0 \quad ; \quad r \geq R_2$$

لأن تأثير التيار الداخلي يتلاشى مع تأثير التيار الخارجي.

$$\vec{B} = 0 \quad ; \quad r \leq R_1$$



لعدم وجود أي تيار على بعد أقل من  $R_1$  .

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$$B_\theta 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\therefore B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ; R_1 \leq r \leq R_2$$

حيث:  $I$  التيار المار داخل المسار المغلق على بعد  $r$ .

أما التدفق المغناطيسي  $\Phi$  من مساحة مستطيلة طولها  $\ell$  (طول

الأسطوانة) وعرضها  $dr$ ، فيساوي:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta} \cdot \hat{n} \ell dr$$

ولكن:

$$\hat{\theta} = \hat{n}$$

$$\therefore \Phi = \int \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)$$

وهو المطلوب.

( - )

ملف حلقي (Toroid) عدد لفاته  $N_1$ ، ومتوسط طوله  $\ell$  ومساحة

مقطعه  $A$ ، محاط تماماً بملف حلقي آخر عدد لفاته  $N_2$ . أوجد المحاثّة

الذاتية لكل منهما  $(L_2, L_1)$  والمحاثّة المتبادلة  $M_{12}$  و  $M_{21}$  لهما.

الحل:

لنتخيل مرور تيار في الملف الداخل قدره  $I_1$  . وبتطبيق قانون أمبير على مسار مغلق نصف قطره  $r$  ويقع داخل الملف الحلقي، فإن المجال المغناطيسي  $B_1$  يعطى بالعلاقة:

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2 \pi r} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell} \quad (1)$$

أما التدفق المغناطيسي الكلي في الملف الداخلي فيساوي:

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \text{عدد لفات الملف} \times \text{التدفق في كل لفة} \\ &= \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell} A \times N_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{\ell} \end{aligned} \quad (2)$$

وكذلك يتولد تدفق مغناطيسي في الملف الخارجي، يساوي:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell} A \times N_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1 A}{\ell} \quad (3)$$

من المعادلة (2)، نجد أن:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{d \Phi_{11}}{d I_1} = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{\ell} \\ \therefore L_1 = M_{11} &= \frac{\mu_0 N_1^2 A}{\ell} \end{aligned} \quad (4)$$

ومن المعادلة (3)، نجد أن:

$$N_{21} = \frac{d \Phi_{21}}{d I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell} \quad (5)$$

أما إذا مر تيار كهربائي في الملف الخارجي مقداره  $I_2$  ، فإن المجال المغناطيسي على بعد  $r$  من المركز يعطى بالعلاقة:

$$B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{2 \pi r} = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{\ell} \quad (6)$$

والتدفق المغناطيسي في الملف الخارجي، فيساوي:

(على افتراض أن مساحة مقطعهما وطولهما متساويان)

$$\Phi_{22} = \frac{\mu_0 N_2^2 I_2 A}{\ell} \quad (7)$$

أما التدفق المغناطيسي في الملف الداخلي، فيساوي:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_2 A}{\ell} \quad (8)$$

من المعادلة (7)، فإن:

$$L_2 = \frac{d \Phi_{22}}{d I_2} = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{\ell}$$

$$\therefore L_2 = M_{22} = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{\ell} \quad (9)$$

ومن المعادلة (8)، فإن:

$$M_{12} = \frac{d \Phi_{12}}{d I_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell} \quad (10)$$

ونلاحظ من المعادلتين، (5) و (10)، أن:

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell} \quad (11)$$

ومن المعادلتين (4) و (9)، نجد أن:

$$\sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{\frac{\mu_0 N_1^2 A}{\ell} \cdot \frac{\mu_0 N_2^2 A}{\ell}} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell} = M_{12} = M_{21}$$

أي أن:

$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_1 L_2} \quad (12)$$

وبشكل عام فإن العلاقة بين M والمحاثة الذاتية  $L_1$  و  $L_2$ ، تكتب على

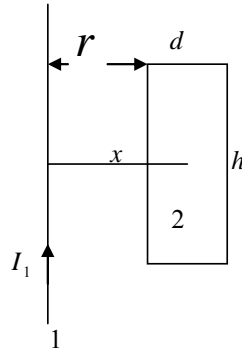
النحو التالي:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

حيث يدعى  $k$  بمعامل الازدواج (Coupling Coefficient) وتتراوح قيمته بين 0 و 1. وتكون قيمته 1 عندما يكون التدفق من أحد الملفين ينساب في الآخر، مثل المحولات (Transformers)، وأما إذا كان الملفان بعيدين عن بعضهما في الفراغ، فإن قيمة  $k$  تكون صغيرة جداً، أو حتى تساوي صفراً.

( - )

دائرتان كهربائيتان مكونتان من سلك مستقيم طويل جداً وآخر بشكل مستطيل أحد بعديه  $h$  والآخر  $d$ . فإذا كان المستطيل يقع في مستوى يمر خلال السلك، والضلعان  $h$  يوازيان السلك ويقعان على بعدين قدرهما  $r$  و  $r + d$  عنه، كما في الشكل رقم (٦-١٢)، احسب المُحَاثَة المتبادلة  $M$  بين الدارتين.



الشكل رقم (٦-١٢)

الحل:

لنفرض مرور تيار  $I_1$  في السلك (1). ونتيجة لذلك سيتدفق مجال كهربائي في الدارة المستطيلة (2). ويعطي المجال  $\vec{B}$  على بعد  $x$  من السلك، بالعلاقة:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi x} \hat{\theta} \quad (1)$$

أما التدفق خلال الدارة المستطيلة الشكل، فيمكن حسابه على النحو التالي:

$$\Phi_{21} = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi x} \hat{\theta} \cdot \hat{n} h dx = \frac{\mu_0 I_1 h}{2 \pi} \int_r^{r+d} \frac{dx}{x} \quad (2)$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1 h}{2 \pi} \left| \ln \left( \frac{r+d}{r} \right) \right|$$

ولكن المحاثة المتبادلة M، تعطى بالعلاقة:

$$M = \frac{d \Phi_{21}}{d I_1} = \frac{d}{d I_1} \left[ \frac{\mu_0 I_1 h}{2 \pi} \left| \ln \left( \frac{r+d}{r} \right) \right| \right] = \frac{\mu_0 h}{2 \pi} \left| \ln \left( \frac{r+d}{r} \right) \right|$$

$$\therefore M = \frac{\mu_0 h}{2 \pi} \left| \ln \left( \frac{r+d}{r} \right) \right| \quad (3)$$

( - )

مَحَثَان مَرَبُوطَان عَلَى التَّوَالِي. فَإِذَا كَانَ مَعَامِل الازدواج K بينهما يساوي 0.7 والمحاثة الفعالة لهما 0.8H عندما يمر بهما تياران باتجاهين متضادين، والمحاثة الفعالة لهما 2.2H عندما يمر بهما تياران بنفس الاتجاه. احسب المحاثة المتبادلة بينهما والمحاثة الذاتية لكل منهما.

**الحل:**

في حالة ربط المحثين بحيث يمر بهما تياران باتجاهين متضادين،

فإن  $L_{\text{eff}}$  تكون:

$$L_{\text{eff}} = L_1 + L_2 - 2 M$$

$$\therefore 0.8 = L_1 + L_2 - 2 M \quad (1)$$

وفي حالة ربط المحثين بحيث يمر بهما تياران بنفس الاتجاه، فإن  $L_{\text{eff}}$  تكون:

$$L_{\text{eff}} = L_1 + L_2 + 2M$$

$$\therefore 2.2 = L_1 + L_2 + 2M \quad (2)$$

ولكن معامل الازدواج  $K$ ، يعطى بالعلاقة [انظر المثال (١٠-٦)]:

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$\therefore 0.7 = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

ومنها فإن:

$$M^2 = 0.49 L_1 L_2 \quad (3)$$

يحل المعادلات (1) و(2) و(3)، نحصل على:

$$M = 0.35 H$$

$$L_1 = 1.32 H$$

$$L_2 = 0.19 H$$

( - )

محثان مربوطان على التوازي. فإذا علمت أن المحثة الذاتية لكل منهما  $7H$  و  $8H$  على الترتيب والمحثة المتبادلة بينهما  $5H$ . احسب المحثة المكافئة (الفعالة) في حالة توصيلهما بطريقة بحيث يمر بهما

(a) - تياران بنفس الاتجاه.

(b) - تياران باتجاهين متضادين.

**الحل:**

(a) في حالة مرور التيارين بنفس الاتجاه، فإن:

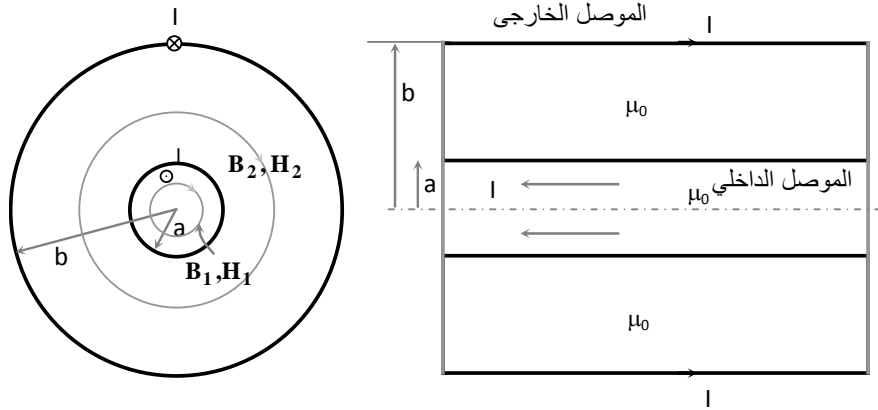
$$L_{\text{eff}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} = \frac{7 \times 8 - 5^2}{7 + 8 - (2 \times 5)} = \frac{31}{5} = 6.2 \text{ H}$$

(b) في حالة مرور التيارين باتجاهين متضادين، فإن:

$$L_{\text{eff}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} = \frac{7 \times 8 - 5^2}{7 + 8 + (2 \times 5)} = 1.24 \text{ H}$$

ونلاحظ أننا أخذنا إشارة  $M$  سالبة في الحالة الأولى لأن ذلك يعطي مُحاثَة فعّالة أكبر مما لو أخذنا إشارة  $M$  موجبة، كما في الحالة الثانية. ولأن مرور تيارين بنفس الاتجاه يعمل على زيادة المجال الحثي في الدارة، بينما مرور التيارين باتجاهين متضادين يعمل على إضعاف المجال الحثي في الدارة.

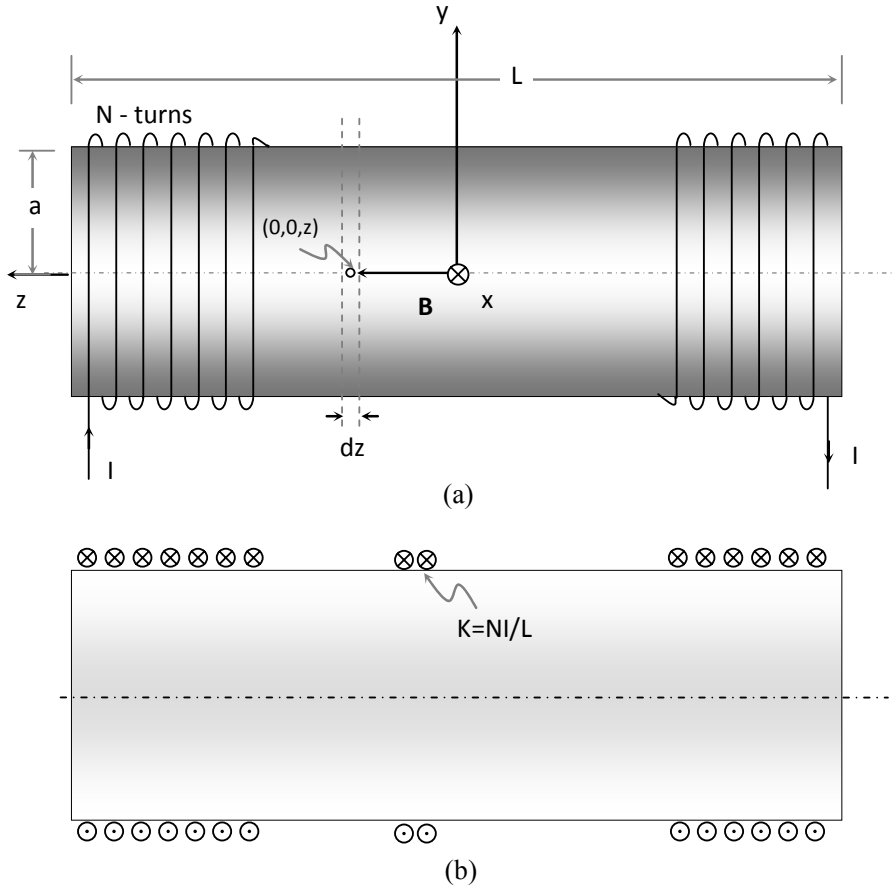
يبين الشكل رقم (١) كابل محوري مكون من موصل داخلي نصف قطره  $a$  ونفاذيته  $\mu_0$  H/m ويحمل تياراً  $I$  وموصل خارجي رقيق نصف قطره  $b$  ونفاذيته  $\mu_0$  H/m ويحمل تياراً  $-I$ . إذا كان الوسط بين الموصلين غير مغناطيسي ونفاذيته  $\mu_0$  H/m أوجد المحاثة الكلية لهذا الكابل لكل وحدة طول.



الشكل رقم (١). الكابل المحوري بنصفي قطر داخلي وخارجي للموصلين  $a$  و  $b$  على التوالي.

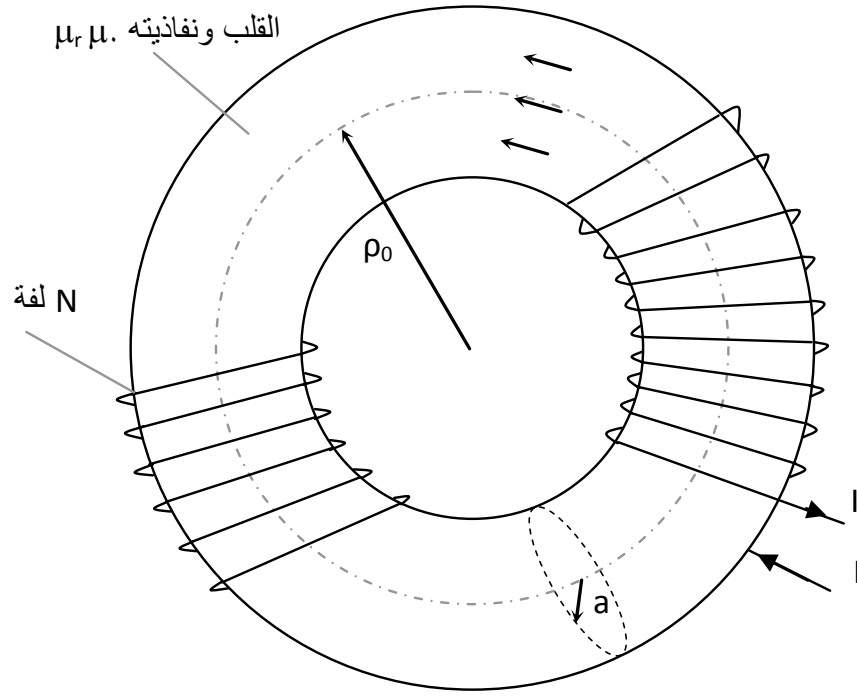
يبين الشكل رقم (٢) ملفاً لولبياً (Solenoid) عدد لفاته  $N$  (اللفات متلاحقة مع بعضها) طوله  $L$  ونصف قطره  $a$  وقلبه من الهواء. إذا كان التيار المار فيه  $I$  فأوجد محاثة هذا الملف. (ملاحظة: أوجد كثافة الفيض المغناطيسي في وسط الملف وأفترض أن  $L \gg a$ ).





الشكل رقم (٢)

يبين الشكل (3) ملفاً حلقياً (toroidal coil) عدد لفاته  $N$  لفة ونصف قطر الحلقة  $\rho_0$  ونصف قطر الملف  $a$ ، فإذا كان قلب هذا الملف هو من مادة حديدية نفاذيتها  $\mu_r \mu_0$  فأوجد حثية هذا الملف.



الشكل (3):- ملف حلقي مكون من  $N$  لفة وقلبه من مادة حديدية نفاذيته  $H/m$   $\mu_r \mu_0$ .

إذا كانت هناك حلقتان موصلتان إحداهما بنصف قطر  $a$  موضوعة في المستوى  $xy$  ومركزها عند نقطة الأصل والثانية موضوعة موازية للمستوى  $xy$  ومركزها على محور  $z$  عند النقطة  $(0, 0, h)$  فإذا كان نصف قطر الحلقة الثانية  $b$  وكانت  $a > b$  وكذلك  $h \gg a$  فأوجد المحاثة التبادلية بين هاتين الحلقتين.

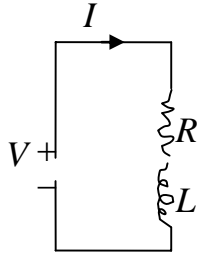
أوجد محاثة ملف حلقي عدد لفاته 100 لفة ونصف قطر حلقتة 10 cm ومساحة مقطعه  $5 \text{ cm}^2$  علماً بأن قلبه من مادة حديدية نفاذيتها النسبية  $\mu_r = 1000$  (لاحظ الفرق بين محاثة هذا الملف ومحاثة الملف الحلزوني).

أوجد محاثة كابل محوري طويل لكل وحدة طول إذا كان نصف قطر موصله الداخلي a أما موصله الخارجي فإن نصف قطره الداخلي b ونصف قطره الخارجي c علماً بأن  $c > b$ . افترض أن نفاذية الموصلين والوسط الفاصل بينهما هي  $H/m$   $\mu_0$ .



## الطاقة المغناطيسية

ذكرنا سابقاً أن الطاقة المغناطيسية هي هيئة من هيئات الطاقة المختلفة (جاذبية، حرارية، مغناطيسية، وضوئية، ...). وكما أن الطاقة الكهروستاتيكية تختزن في المجال الكهروستاتيكي الناتج عن توزيع للشحنات، فإن الطاقة المغناطيسية تختزن كذلك، ولكن في المجال المغناطيسي الناتج عن توزيعات للتيارات. لهذا فإن تكوين أي مجال مغناطيسي يحتاج إلى بذل طاقة يمكن تحويلها من شكل إلى آخر. ولقد بينا في الفصل السابق من خلال دراستنا لقانون فارادي للحث أن توليد القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية في دارة ما، يتم بتغيير التدفق المغناطيسي خلالها بطريقة ما.



فإذا كانت  $V$  تمثل القوة الدافعة الكهربائية المؤثرة في دارة كهربائية تحتوي على ملف محاثته  $L$  ومقاومته  $R$ ، فإن التيار الكهربائي  $I$  الذي يسري في الدارة، عند لحظة ما، يمكن إيجاده من العلاقة التالية:

$$V + \mathcal{E} = IR \quad (7-1)$$

حيث تمثل  $\mathcal{E}$  : القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية.  
ويمكن إيجاد الشغل المبذول من قبل  $V$  في تحريك كمية من الشحنة  $dq$  خلال الدارة بضرب طرفي المعادلة (7-1) بكمية الشحنة  $dq$ ، على النحو التالي:

$$V dq + \mathcal{E} dq = I dq R$$

ومنها، فإن:

$$V dq = - \mathcal{E} dq + I dq R$$

ولكن:

$$dq = Idt$$

$$\therefore V dq = - \mathcal{E} I dt + I^2 R dt \quad (7-2)$$

ولكن المقدار  $-\mathcal{E} dt$  في المعادلة (7-2) يساوي  $d\Phi$ ، حسب قانون فارادي للحث وبالتالي يمكننا كتابة المعادلة (7-2) على الشكل التالي:

$$V dq = I d\Phi + I^2 R dt \quad (7-3)$$

ونلاحظ من المعادلة (7-3) أن الشغل المبذول ( $V dq$ ) من قبل  $V$  قد تجزأ إلى جزأين: الأول ( $I d\Phi$ ) ويمثل الشغل المبذول ضد القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية في الدارة (انظر الشكل رقم 7-1)، والثاني ( $I^2 R dt$ ) ويمثل الطاقة الكهربائية المتحولة إلى حرارة. ويختلف الحد الثاني عن الأول بأنه غير قابل للعكس، كأن نقوم بتحويل الحرارة في المقاومة إلى كهرباء مرة أخرى خلال الدارة، وعلى افتراض عدم وجود طاقة حرارية ضائعة، فإن بالإمكان إهمال الحد  $I^2 R dt$ . وتؤول المعادلة (7-3)، بالتالي إلى:

$$dW_b = V dq = I d\Phi \quad (7-4)$$

وتمثل المعادلة السابقة الشغل المبذول ( $dW_b$ ) من قبل مصادر طاقة كهربائية خارجية كبطارية مثلاً، وذلك عند إهمال فقدان الحرارة لجول. كما أننا اعتدنا في النتيجة أعلاه أن الدارة صلبة (rigid) وثابتة (Stationary) ولا يوجد بها تخلف مغناطيسي (hysteresis). أما الحالة الأخيرة (وجود تخلف مغناطيسي) فسيتم نقاشها في نهاية هذا الفصل.

من المعادلة (7-4)، نلاحظ منها أن الشغل المبذول ( $dW_b$ ) يكون موجباً، عندما يتغير التدفق  $d\Phi$  خلال الدارة بنفس اتجاه التيار  $I$ ، ويكون سالباً عند تغير التدفق بعكس اتجاه التيار.

-

لنفرض دارة صلبة وثابتة تحتوي على وسط مغناطيسي خطي أو موجودة فيه. ولنفرض أن التيار فيها أصبح  $I$  خلال الزمن  $t$ . وكما تعلم فإنه يجب بذل شغل كهربائي من مصدر خارجي للحصول على ذلك التيار، والذي ينتج عنه مجال مغناطيسي يخزن كطاقة مغناطيسية. وبما أن الدارة صلبة وثابتة فهذا يعني عدم وجود شغل ميكانيكي مبذول بها. وإذا كانت الدارة كذلك عديمة المقاومة ( $R = 0$ ) فهذا يعني عدم وجود فقدان حراري بها. وبالتالي يمكن استعادة الطاقة المغناطيسية عند قطع التيار الكهربائي. وهكذا فإن الشغل المبذول  $dW_b$  يساوي التغير في الطاقة المغناطيسية  $dU$ .

ويمكن حساب الطاقة المغناطيسية  $dU$ ، لدارة تمتلك المواصفات أعلاه، من العلاقة (7-4). أي أن:

$$dU = dW_b = I d\Phi \quad (7-5)$$

ترتبط المحاثة الذاتية  $L$  والتدفق  $\Phi$  والتيار  $I$  ببعضها، بالعلاقة:

$$d\Phi = L dI$$

وبالتعويض عن  $d\Phi$  من العلاقة السابقة في المعادلة (7-5)، نجد أن:

$$dU = L I dI$$

ومنها، فإن:

$$U = \frac{1}{2} L I^2 \quad (7-6)$$

ويمكن الحصول على صياغتين أخريتين للطاقة المخزونة  $U$  في دارة معينة باستخدام المعادلة التالية:

$$\Phi = L I$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \quad (7-7)$$

$$U = \frac{1}{2} \Phi I \quad (7-8)$$

والمعادلات الثلاث السابقة (7-6)، (7-7) و (7-8) تمثل الطاقة المغناطيسية المخزونة في دارة كهربائية مُحاثتها  $L$  عند مرور تيار فيها  $I$  وتدفق مغناطيسي  $\Phi$  خلالها. وهذه المعادلات شبيهة تماماً بمعادلات الطاقة الكهربائية المخزونة في مكثف مواسعته  $C$ ، عندما يكون فرق الجهد بين طرفيه  $\Delta\Phi$ ، ويحمل شحنة  $q$ . أي أن:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} C (\Delta\Phi)^2 \\ U &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \\ U &= \frac{1}{2} q \Delta\Phi \end{aligned} \right\}$$



بينا كيفية حساب الطاقة المغناطيسية المخزنة في دائرة واحدة. والآن سنفرض وجود عدد من الدارات الكهربائية المتجاورة ثم نحسب الطاقة المغناطيسية المخزنة بها. وسنفرض أيضاً أن هذه الدارات لها نفس مواصفات الدارة التي سبق نقاشها (عديمة المقاومة، صلبة، ثابتة، وسط مغناطيسي خطي). إن الشغل المبذول  $dW_b$  ضد القوى الدافعة الكهربائية التأثيرية يساوي الطاقة المخزونة  $dU$ ، ويساوي:

$$dW_b = dU = \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i \quad (7-9)$$

ونظراً لأن الدارات صلبة، فهذا يعني أنها ثابتة الشكل، وبالتالي فإن مُحاثاتها الذاتية ثابتة. وبما أن الدارات ثابتة (ساكنة) فهذا يعني أن مُحاثاتها المتبادلة ثابتة. إذاً فالوسيلة الوحيدة لتغيير التدفق  $\Phi_i$  هو بتغيير التيارات الكهربائية  $I_i$  في تلك الدارات. أي أن:

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} dI_j = \sum_{j=1}^n M_{ij} dI_j \quad (7-10)$$

من المعادلتين (7-9) و(7-10)، نجد أن:

$$dU = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i dI_j \quad (7-11)$$

ولإيجاد الطاقة  $U$  علينا إيجاد تكامل المعادلة (7-11). وهناك عدة طرق لزيادة التيارات في الدارات من قيمها الابتدائية إلى قيمها النهائية. كأن نزيد مثلاً التيارات مع بعضها بعضاً دفعة واحدة. أو أن نزيد كل تيار على حده إلى قيمته النهائية. أو أن نزيد بعضها إلى قيمة نهائية ثم نزيد بعدها البقية. وفي كل طريقة من الطرق السابقة ستعتمد الطاقة على الحالة

النهائية للدارات، بغض النظر عن الكيفية التي تمت بها زيادة التيارات. أما نحن فسننتج طريقة سهلة لزيادة التيارات، وهي أننا سنزيدها معاً بشكل متزامن وبنفس النسبة. أي أننا سنفرض أن جميع التيارات في اللحظة  $t$  لها نفس النسبة ( $\alpha$ ) من التيار النهائي. أي أن التيار في أي لحظة يساوي:

$$I_i(t) = \alpha I_i \quad (7-12)$$

حيث  $\alpha$  نسبة لا تعتمد على  $t$  وتتغير قيمتها من 0 إلى 1. ومن المعادلة (7-12) يمكن كتابة:

$$d I_j(t) = I_j d \alpha \quad (7-13)$$

وبالتعويض في المعادلة (7-11) عن  $I_i$  من المعادلة (7-12) وعن  $d I_i$  من المعادلة (7-13)، نحصل على:

$$d U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j \alpha d \alpha$$

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j \int_0^1 \alpha d \alpha$$

ولكن:

$$\int_0^1 \alpha d \alpha = \frac{1}{2} \alpha^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j \quad (7-14)$$

وحيث إن:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} I_j$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \quad (7-15)$$

حيث  $\Phi_i$  التدفق المغناطيسي الكلي خلال الدارة  $i$  والناتج عن جميع الدارات المجاورة بما فيها الدارة  $i$ . ونلاحظ في حالة وجود دارة واحدة، أن المعادلة (7-15) تؤول إلى المعادلة (7-6) حيث إن  $M_{11} = L$  لدارة واحدة.

تُعبّر المعادلات (7-6) و (7-7) و (7-8) عن الطاقة المغناطيسية ولكن بدلالة معاملات خاصة بالدارات الكهربائية مثل  $I$  و  $L$ . ويمكن التعبير عن هذه الطاقة المغناطيسية بأسلوب آخر بدلالة متجهي المجال  $\vec{B}$  و  $\vec{H}$ ، وذلك لأن الأسلوب الأخير يوضح لنا كيفية تخزين الطاقة في المجال المغناطيسي نفسه.

لنفرض مجموعة من الدارات الكهربائية الصلبة المتواجدة في وسط مغناطيسي خطي والحاملة للتيار. وحسب المعادلة (7-15)، فإن طاقة هذه المجموعة وليكن عددها  $n$ ، هي:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i$$

ولتسهيل نقاشنا في هذا الموضوع، سنفترض أن كل دارة كهربائية تحتوي على لفة واحدة. وبهذا يمكن التعبير عن التدفق في كل دارة بالعلاقة:

$$\Phi_i = \int_{S_i} \vec{B} \cdot \hat{n} da$$

ولكن:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\therefore \Phi_i = \int_{S_i} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} da$$

وحسب قانون ستوكس، فإن التكامل السطحي السابق يمكن تحويله إلى تكامل خطي، على النحو التالي:

$$\Phi_i = \int_{S_i} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} \, da = \oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{l}_i \quad (7-16)$$

حيث  $\vec{A}$ : الجهد المتجه الموضعي (local vector potential).

$C_i$ : حدود الدارة.

$d\vec{l}_i$ : التغيير في الإزاحة على امتداد  $C_i$ .

وبالتعويض عن  $\Phi_i$  من المعادلة (7-16) في المعادلة (7-15)، نحصل على:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{l}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \vec{A} \cdot I_i d\vec{l}_i \quad (7-17)$$

ويمكن استبدال  $I_i d\vec{l}_i$  بالمقدار  $\vec{J} \, dv$  واستبدال  $\sum_{i=1}^n \oint_{C_i}$  بالتكامل

في المعادلة (7-17) فتتحول إلى الشكل التالي:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} \, dv$$

ولكن:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \, dv = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{A} \, dv$$

وباستخدام المتطابقة التالية:

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - (\nabla \times \vec{G}) \cdot \vec{F}$$

حيث:

$$(\nabla \times \vec{G}) \cdot \vec{F} = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G})$$

فإن  $\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H})$ ، على غرار المتطابقة السابقة، تساوي:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{A} &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} - \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) \\ U &= \frac{1}{2} \int_V (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{A} \, dv = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} \, dv - \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) \, dv \end{aligned}$$

وبتطبيق نظرية التفرق (divergence theorem) على التكامل الحجمي الثاني في المعادلة السابقة لتحويله إلى تكامل سطحي، فإننا نحصل على:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} \, dv - \frac{1}{2} \oint_S (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} \, dS \quad (7-18)$$

حيث  $S$ : السطح الذي يحيط بالحجم  $V$ ، وكلاهما يحتضن الدارات الكهربائية المفترضة. وبما أنه يمكن بسط السطح المفترض إلى مسافات بعيدة (بالتبع الحجم يزداد كذلك) وبالنظر إلى معادلتنا حساب المتجهين  $\vec{A}$  و  $\vec{H}$  التاليتين:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dv' \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, dv' \end{aligned}$$

نجد أن:

$$\vec{A} \propto \frac{1}{r} \quad ; \quad \vec{H} \propto \frac{1}{r^2}$$

وبالتالي فإن:

$$\vec{A} \times \vec{H} \propto \frac{1}{r^3}$$

ولكن المساحة  $S$  تتناسب طردياً مع  $r^2$ ، وبالتالي فإن التكامل السطحي في المعادلة (7-18)، يتناسب عكسياً مع  $r$ . أي أن:

$$\left[ \oint_S (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} dS \right] \propto \frac{1}{r}$$

حيث إن  $r$  : المسافة من نقطة الأصل القريبة من توزيعات التيارات إلى نقطة معينة على السطح. ونلاحظ أن حدود  $S$  إذا امتدت إلى اللانهاية، وهذا خيارنا بالطبع، فإن مساهمة التكامل السطحي في المعادلة (7-18) يتلاشى. أي أنه بإمكاننا إسقاط هذا التكامل كلياً من حساباتنا عند بسطنا حدود التكامل الحجمي ليشمل الفضاء بأكمله. وهكذا نجد أن:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) dV$$

وبالتعويض عن  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$  في العلاقة السابقة، نحصل على:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV \quad (7-19)$$

والمعادلة (7-19) شبيهة تماماً بمعادلة الطاقة الكهروستاتيكية المخزونة في المجال الكهربائي  $\vec{E}$  والتي كان شكلها كما يلي:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

أما كثافة الطاقة (Energy Density)، أو ما يعرف كذلك بكثافة الطاقة الحجمية في المجال المغناطيسي، فإنها تعطى بالعلاقة:

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (7-20)$$

وفي حالة الأوساط المغناطيسية الخطية. حيث إن  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ، فإن المعادلة (7-20) تؤول إلى ما يلي:

$$u = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (7-21)$$

وتشير المعادلة (7-21) إلى أن الطاقة المغناطيسية تختزن في المجال المغناطيسي ( $\vec{H}$  أو  $\vec{B}$ ) تماماً كما هو الحال في الكهروستاتيكا، حيث إن الطاقة الكهربائية تختزن في المجال الكهربائي ( $\vec{E}$  أو  $\vec{D}$ ). أما الطاقة المغناطيسية الكلية ( $U$ ). فيمكن إيجادها من المعادلة التالية:

$$U = \int_v u \, dv \quad (7-22)$$

بعد أن تعرفنا على صيغ متعددة لحساب الطاقة المغناطيسية، سنقوم بدراسة كيفية حساب القوة (Force) أو العزم (Torque) على دارة كهربائية صلبة. من معرفتنا لتلك الطاقة المغناطيسية لحالات مختلفة. أولاً: لنفرض دارة كهربائية معينة عملت إزاحة صلبة (أي دون تغيير في شكلها أثناء الإزاحة) قدرها  $d\vec{r}$ . نتيجة التأثير عليها بقوة مغناطيسية  $\vec{F}$ . ولنفرض أن التيار الكهربائي  $I$  المار فيها بقي ثابتاً (هذا شرط أساسي). في هذه الحالة فإن الشغل الميكانيكي المبذول من قبل  $\vec{F}$  على النظام، يعطى بالعلاقة:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7-23)$$

ولكن هذا الشغل ( $dW$ ) يتضمن مساهمتين: الأولى وتتمثل في الشغل المبذول من قبل مصادر طاقة خارجية ( $dW_b$ ). وهذا الشغل يبذل ضد القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية التي تعمل على المحافظة على تيار الدارة ثابتاً، ويمكن الحصول عليه من بطارية مثلاً. والمساهمة الثانية، تتمثل في التغيير في طاقة وضع النظام  $dU$ .

أي أن:

$$dW = dW_b - dU \quad (7-24)$$

ويمكننا التخلص من  $dW_b$  في المعادلة (7-24)، على النحو التالي:

من المعادلة (7-15)، فإن:

$$dU = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i$$

ومن المعادلة (7-9)، فإن:

$$dW_b = \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i$$

ومن العلاقتين السابقتين، فإن:

$$dW_b = 2 dU$$

وبالتعويض عن  $dW_b$  من العلاقة السابقة في المعادلة (7-24)، نجد أن:

$$dW = dU \quad (7-25)$$

أي أن الشغل المبذول  $dW$  من قبل القوة المغناطيسية  $\vec{F}$  يساوي التغير في

طاقة وضع النظام ( $dU$ ). وحسب المعادلة (7-23)، فإن:

$$dW = dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

ويمكن كتابة العلاقة السابقة على النحو التالي:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} U = \hat{i} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \hat{i} F_x + \hat{j} F_y + \hat{k} F_z$$

ومنها فإن:



$$\begin{aligned}
 F_x &= \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_I \\
 F_y &= \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_I \\
 F_z &= \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_I
 \end{aligned}
 \tag{7-26}$$

وتشير المعادلات (7-26)، إلى أن القوة المؤثرة في دائرة كهربائية ما هي إلا تدرج أو انحدار (gradient) الطاقة المغناطيسية  $U$  عند ثبوت التيار فيها من خلال تأثير القوة.

ثانياً: أما إذا كانت الدارة تدور في مكانها بدلاً من إزاحتها من مكانها. وفي هذه الحالة، فإن معادلات الحالة السابقة تتحول في حالة الدوران إلى الشكل التالي:

$$dW = dU = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = \tau_1 d\theta_1 + \tau_2 d\theta_2 + \tau_3 d\theta_3$$

حيث  $\vec{\tau}$  : العزم الدوراني على الدارة.  
 $d\vec{\theta}$  : الإزاحة الزاوية للدارة.

ومنها فإن:

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_1 &= \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right)_I \\
 \tau_2 &= \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_2} \right)_I \\
 \tau_3 &= \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_3} \right)_I
 \end{aligned} \right\}
 \tag{7-27}$$

ثالثاً: القوة المؤثرة في دارة كهربائية عندما يكون التدفق  $\Phi$  ثابتاً. وفي هذه الحالة فإن  $dW_b$  حسب المعادلة (7-9) تساوي صفراً. أي أن:

$$dW_b = \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i = 0 \quad \text{لأن } d\Phi_i = 0$$

وتصبح المعادلة (7-24)، على النحو التالي:

$$dW = -dU$$

وفي حالة إزاحة الدارة من مكانها إزاحة صلبة، فإن:

$$dW = -dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

وينتج عن ذلك:

$$\begin{aligned} \vec{F} = -\vec{\nabla} U &= -\left[ \hat{i} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \\ &= \left[ \hat{i} F_x + \hat{j} F_y + \hat{k} F_z \right] \end{aligned}$$

ومنها فإن:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_\Phi \\ F_y &= -\left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_\Phi \\ F_z &= -\left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_\Phi \end{aligned} \right\} \quad (7-28)$$

رابعاً: يمكن إيجاد العزم الدوراني (Torque) المؤثر في دارة كهربائية عندما يكون التدفق ثابتاً على غرار الحالة التي تم فيها الدوران بثبوت التيار. وسنحصل على المعادلات التالية:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= - \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right)_\Phi \\ \tau_2 &= - \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_2} \right)_\Phi \\ \tau_3 &= - \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_3} \right)_\Phi \end{aligned} \right\} \quad (7-29)$$

لقد اقتصر نقاشنا في البنود السابقة على تغيرات الطاقة للأنظمة المغناطيسية القابلة للعكس (Reversible) والخطية (Linear). أما الآن فسنناقش أنظمة تحتوي على مواد مغناطيسية ذات تخلف مغناطيسي. حيث يؤدي التخلف المغناطيسي دوراً بارزاً فيها. عند توصيل الملف بمصدر طاقة كهربائية خارجي، فإن الشغل المبذول ضد القوة الدافعة الكهربائية المحتثة في الملف، يعطى بالعلاقة التالية:

$$dW_b = I d\Phi$$

حيث تمثل  $d\Phi$  التغير في التدفق الكلي خلال الدارة الكهربائية. ومن المناسب أن نجعل  $d\Phi$  تمثل التغير في التدفق المغناطيسي خلال لفة واحدة من الملف والذي يكون متساوياً في كل لفة من لفاته. وبالتالي فإن:

$$\delta W_b = N \quad I \delta \left( \int d\Phi \right) = N I \delta \Phi \quad (7-27)$$

حيث  $\Phi$  الآن عبارة عن التدفق في كل لفة من لفات الملف كما أسلفنا.

لنعتبر المادة الفرومغناطيسية عبارة عن جزء من الدارة المغناطيسية، عندئذ يمكن التعويض عن  $NI$  (القوة الدافعة المغناطيسية mmf) بالمقدار  $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$ . حيث إن:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI$$

وبالتالي فإن المعادلة (7-27)، تصبح على النحو التالي:

$$\delta W_b = \oint_C (\vec{H} \cdot d\vec{\ell}) \delta \Phi$$

ولكن:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} da = BA$$

ومنها، فإن:

$$\delta \Phi = A \delta B$$

حيث:  $A$  مساحة مقطع الدارة المغناطيسية خلال مسافة محدودة طولها  $d\ell$

$$\therefore \delta W_b = \oint_C (\vec{H} \cdot d\vec{\ell}) A \delta B \quad (7-28)$$

وبما أن  $d\vec{\ell}$  موازية دائماً لمسار التدفق  $\Phi$  وبالتالي موازية للمجال  $\vec{B}$  فإن:

$$(\delta B) A d\vec{\ell} = A d\ell \delta \vec{B} = dv \delta \vec{B}$$

وبالتالي، يمكن كتابة المعادلة (7-28)، على النحو التالي:

$$\delta W_b = \oint_C (\vec{H} \cdot d\vec{\ell}) A \delta B = \int_V \vec{H} \cdot \delta \vec{B} dv \quad (7-29)$$

حيث تمثل  $V$ : حجم الدارة المغناطيسية. أو بمعنى آخر المنطقة التي يتواجد بها المجال المغناطيسي، ولما كانت المادة المغناطيسية في النظام المستخدم، لها خصائص مغناطيسية قابلة للعكس، أمكن استخدام العلاقة (7-29)،

لإيجاد الطاقة المغناطيسية، وذلك بتكاملها من  $B = 0$  إلى قيمة نهائية لـ  $B$ . وإذا كانت المادة المغناطيسية خطية أيضاً، فإن المعادلة (7-29) ستؤول إلى المعادلة (7-19) التالية:

$$W_b = \frac{1}{2} \int_v \overline{H} \cdot \overline{B} \, dv$$

لهذا تعد صياغة المعادلة (7-29) أكثر شمولية من المعادلة (7-19)، إضافة إلى أنها تتبأ بصورة دقيقة عن مقدار الشغل المبذول على النظام حتى في حالة وجود تخلف مغناطيسي.

ويمكننا من المعادلة (7-29)، أن نجد التغير في المجال المغناطيسي الذي سببه الشغل المبذول  $dW_b$  لكل وحدة حجم من المادة المغناطيسية (أو الفراغ) في النظام على النحو التالي:

$$dW_b = \overline{H} \cdot d\overline{B} \quad (7-30)$$

أما في حالة تمرير تيار متردد (Alternating Current) في الملف، فإننا سنحصل على تخلف مغناطيسي في المادة. وفي هذه الحالة فإن الشغل المبذول لكل وحدة حجم يتطلب تغيير المجال المغناطيسي  $B$  وتغيير  $H$  وفقاً لذلك من الصفر إلى  $H_{\max}$ . أي أن:

$$W_b = \int_a^b H \cdot dB \quad (7-31)$$

والشغل السابق بالطبع موجب نظراً لكون كل من  $H$  و  $dB$  موجباً. نلاحظ فيما سبق، أننا قمنا بإيجاد  $W_b$  لدورة كاملة حتى عادت المادة المغناطيسية إلى حالتها عند البدء (لاحظ أننا لم نبدأ من  $H = 0$  و  $B = 0$ ، أي أن المادة ممغنطة أصلاً) وهذا يعني أن الطاقة التي نحسبها من المعادلة (7-32) لكل وحدة حجم هي طاقة ضائعة (مفقودة) لدورة

واحدة. وفي الحقيقة أن هذه الطاقة المفقودة (أو الشغل المبذول) تظهر كحرارة في المادة المغناطيسية. وهذا هو سبب سخونة المحولات (Transformers) عند تشغيلها (طبعاً بتيار متردد). أما في حالة المواد المغناطيسية الخطية، أي التي تحتوي على منحنى تخلف مغناطيسي، فإن  $W_b$  لها تساوي صفراً.

( - )

احسب الطاقة المغناطيسية المخزنة في ملف لولبي طويل، نصف قطره  $R$  وطوله  $l$  وعدد لفاته لكل وحدة طول  $n$ ، عندما يمر فيه تيار  $I$  (أهمل تأثيري الحواف).

الحل:

يمكننا استخدام المعادلة (7-8) التالية لحساب الطاقة المغناطيسية

المخزنة في الملف:

$$U = \frac{1}{2} I \Phi$$

حيث  $I$ : التيار المار في الملف.

$\Phi$ : التدفق الكلي خلال الملف.

ولكن التدفق ( $\Phi'$ ) في كل لفة من لفات الملف يعطى بالعلاقة:

$$\Phi' = \int \vec{B} \cdot \hat{n} da = B (\pi R^2)$$

أما المجال  $\vec{B}$  داخل الملف، ويعطى بالعلاقة:

$$B = \mu_0 n I$$

$$\therefore \Phi' = \mu_0 n I \cdot \pi R^2$$

أما التدفق الكلي  $\Phi$  خلال الملف الذي عدد لفاته  $(n \ell)$  فيساوي:

$$\Phi = n \ell \Phi' = \mu_0 n^2 I \pi R^2 \ell$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} \mu_0 \pi n^2 I^2 R^2 \ell$$

( - )

افترض وجود دارتين للتيار متبادلتين التأثيرتتميزان بالمحاثات

التالية:

$$L_1 = \beta I_1^s, \quad L_2 = \beta I_2^s, \quad M_{12} = M_{21} = \beta I_1^{s/2} I_2^{s/2}$$

حيث  $\beta$  و  $s$  يمثلان مقداراً ثابتاً. ولتكن المنظومة المغناطيسية قابلة للعكس ولكنها غير خطية. احسب الطاقة المغناطيسية للمنظومة بدلالة

التيارات النهائية  $I_{1f}$  و  $I_{2f}$  ، بطريقتين:

(a) بجلب التيارات إلى قيمها النهائية بشكل متزامن.

(b) بجلب التيار  $I_1$  إلى قيمته النهائية مع الحفاظ على  $I_2 = 0$  ، ومن

ثم تغيير  $I_2$  إلى القيمة النهائية.

الحل:

بتطبيق المعادلة (7-9) على الدارتين، نجد أن:

$$dU = \sum_{i=1}^2 I_i d\Phi_i = I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2$$

ولكن:

$$d\Phi_1 = L_1 dI_1 + M_{12} dI_2$$

$$d\Phi_2 = L_2 dI_2 + M_{21} dI_1$$

$$dU = I_1 L_1 dI_1 + I_1 M_{12} dI_2 + I_2 L_2 dI_2 + I_2 M_{21} dI_1$$

وبالتعويض عن  $L_1$  و  $L_2$  و  $M_{12}$  و  $M_{21}$  : نجد أن:

$$\begin{aligned} dU &= \beta I_1^3 dI_1 + \beta I_1 I_1^{s/2} I_2^{s/2} dI_2 + \beta I_2 I_2^s dI_2 + \beta I_2 I_1^{s/2} I_2^{s/2} dI_1 \\ dU &= \left[ I_1^{s+1} + I_1^{s/2} I_2^{3s/2} \right] \beta dI_1 + \left[ I_2^{s+1} + I_2^{s/2} + I_1^{3s/2} \right] \beta dI_2 \quad (1) \end{aligned}$$

(a) الطريقة الأولى، وهي جلب التيارات إلى قيمها النهائية بشكل متزامن.  
أي أن:

$$I_i = \alpha I_{if} \quad ; \quad dI_i = I_{if} d\alpha$$

بالتعويض عن  $dI_i$  و  $I_i$  في المعادلة (1)، نحصل على:

$$\begin{aligned} U &= \int \left[ (\alpha I_{if})^{s+1} \beta I_{if} d\alpha + (\alpha I_{if})^{s/2} (\alpha I_{2f})^{3s/2} \beta I_{if} d\alpha + (\alpha I_{2f})^{s+1} \beta I_{2f} d\alpha \right. \\ &\quad \left. + (\alpha I_2)^{s/2} (\alpha I_{1f})^{3s/2} \beta I_{2f} d\alpha \right] \\ &= \left[ \beta I_{if}^{s+2} + \beta I_{if}^{3s/2} I_{2f}^{3s/2} + \beta I_{2f}^{s+2} + \beta I_{if}^{3s/2} I_{2f}^{3s/2} \right] \\ &\quad \int_0^1 \alpha^{s+1} d\alpha \end{aligned}$$

ولكن:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \alpha^{s+1} d\alpha &= \left. \frac{\alpha^{s+2}}{s+2} \right|_0^1 = \frac{1}{s+2} \\ \therefore U &= \frac{1}{s+2} \left[ L_1 \frac{I_{if}^{s+2}}{I_{if}^2} + M_{12} \frac{I_{if}^{3s/2} I_{2f}^{3s/2}}{I_{if}^{s/2} I_{2f}^{s/2}} + L_2 \frac{I_{2f}^{s+2}}{I_{2f}^2} + M_{12} \frac{I_{if}^{3s/2} I_{2f}^{3s/2}}{I_{if}^{s/2} I_{2f}^{s/2}} \right] \\ U &= \frac{1}{s+2} \left[ L_1 I_{if}^2 + 2 M_{12} I_{if} I_{2f} + L_2 I_{2f}^2 \right] \quad (2) \end{aligned}$$

(b) الطريقة الثانية، بجلب التيار  $I_1$  إلى قيمته النهائية  $I_{if}$  مع إبقاء.

$I_2 = 0$  . أي أن  $dI_2 = 0$  وبالتالي تؤول المعادلة (1) إلى ما يلي:

$$\therefore U_1 = \int_0^{I_{if}} \beta I_1^{s+1} dI_1 = \beta \frac{I_{if}^{s+2}}{s+2} = \frac{\beta L_1 I_{if}^2}{s+2}$$



والآن جلب  $I_2$  إلى قيمته النهائية  $I_{2f}$  مع إبقاء  $I_{1f}$  على حالة. أي  
 أن  $dI_1 = 0$ . وبالتالي، تؤول المعادلة (1) إلى ما يلي:

$$\begin{aligned} U_2 &= \beta \int_0^{I_{2f}} I_2^{s+1} dI_2 + \beta I_{1f}^{3s/2} \int_0^{I_{2f}} I_2^{s/2} dI_2 \\ &= \frac{\beta I_{2f}^{s+2}}{s+2} + \frac{\beta I_{1f}^{3s/2} I_{2f}^{3s/2}}{s/2+1} = \frac{\beta I_{2f}^{s+2}}{s+2} + \frac{2\beta I_{1f}^{3s/2} I_{2f}^{3s/2}}{s+2} \\ \therefore U_1 + U_2 &= \frac{\beta L_1 I_{1f}^2}{s+2} + \frac{\beta I_{2f}^{s+2}}{s+2} + \frac{2\beta I_{1f}^{3s/2} I_{2f}^{3s/2}}{s+2} \\ &= \frac{1}{s+2} [L_1 I_{1f}^2 + 2M_{12} I_{1f} I_{2f} + L_2 I_{2f}^2] \quad (3) \end{aligned}$$

ونلاحظ تساوي النتيجةين [المعادلة (2) و (3)]. ونستنتج أن الطاقة المخزونة  
 في  $U$  في عدد من الدارات لا يعتمد على كيفية زيادة التيارات فيها إلى  
 قيمها النهائية.

( - )

أوجد الطاقة المغناطيسية المخزونة في الملفين الحلقين المذكورين  
 في المثال (٦-١٠) من الفصل السابق، إذا مر بهما تياران  $I_1$  و  $I_2$  ، على  
 الترتيب، وبنفس الاتجاه.

**الحل:**

لقد وجدنا في المثال (٦-١٠)، أن المُحاثَة الذاتية  $L_1$  و  $L_2$   
 للملفين الأول والثاني على الترتيب تعطى بالعلاقتين التاليتين:

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{\ell} \quad (1)$$

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{\ell} \quad (2)$$

أما المُحَاثَة المتبادلة بين الملفين فتعطى بالعلاقة:

$$M_{12} = M_{21} = M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{\ell} \quad (3)$$

وتعطى الطاقة المخزونة في عدد من الدارات بالعلاقة التالية:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} M_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} M_{21} I_2 I_1 + \frac{1}{2} M_{22} I_2^2$$

ولكن:

$$M_{11} = L_1 ; \quad M_{22} = L_2 ; \quad M_{12} = M_{21} = M$$

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N_1^2 A I_1^2}{\ell} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N_2^2 A I_2^2}{\ell} + \frac{\mu_0 N_1 N_2 A I_1 I_2}{\ell}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 A}{\ell} [N_1^2 I_1^2 + N_2^2 I_2^2 + 2 N_1 N_2 I_1 I_2] \quad (5)$$

( - )

أعد حل المثال (٧-١)، باستخدام العلاقة (7-22).

**الحل:**

تعطى الطاقة المغناطيسية المخزونة في المجال المغناطيسي للملف

اللولبي بالعلاقة:

$$U = \int_v u \, d v \quad (\text{على الفضاء بأكمله})$$

ولكن المجال المغناطيسي بالنسبة للملف اللولبي يتواجد في داخله فقط.

إذن فالطاقة  $U$  المختزنة خارج الملف تساوي صفراً.

$$\therefore U = \int_v u \, dv \quad \left. \begin{array}{l} \text{(للفضاء داخل الملف فقط)} \\ \text{والمحتوي على المجال)} \end{array} \right\}$$

ولكن:

$$u = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} H B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

وحيث إن:

$$B = \mu_0 n I$$

$$\therefore u = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 = \text{مقدار ثابت}$$

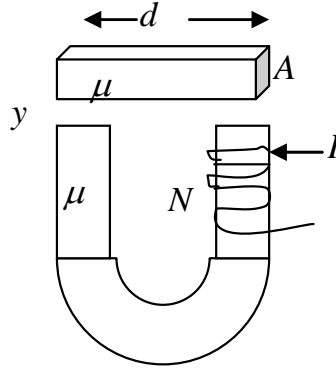
$$\therefore U = \int \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 \, dv = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 \int dv = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 V$$

حيث  $V$ : حجم الملف اللولبي ويساوي  $\pi R^2 \ell$

$$\therefore U = \frac{\pi}{2} \mu_0 n^2 I^2 R^2 \ell$$

( - )

مغناطيس كهربائي على شكل حرف U. طوله  $\ell$  والمسافة بين قطبيه  $d$ ، مصنوع من مادة نفاذيتها  $\mu$  ومساحة مقطعها مربعة وتساوي  $A$ . ملفوف عليه سلك يحمل تيار  $I$ ، وعدد لفاته  $N$ . أوجد القوة التي يمسك بها المغناطيس قطعة مصنوعة من المادة نفسها وذات مساحة مقطع مساوية لمقطع المغناطيس بحيث توضع مقابل قطبيه كما في الشكل رقم (٧-٢).



الشكل رقم (٧-٢)

الحل:

نحسب القوة  $F_y$  عندما تكون القطعة العلوية في الشكل رقم

(٧-٢) على ارتفاع  $y$  من قطبي المغناطيس. ثم نجد  $F_y \Big|_{y=0}$ .

وبما أن التيار ثابت، فإن القوة المطلوبة يمكن إيجادها من الطاقة

$U$ ، على النحو التالي:

$$F_y = \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_I = \left( \frac{dU}{dy} \right)_I \quad (1)$$

ويمكن إيجاد  $U$  على النحو التالي:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \vec{B} \cdot \vec{H} \, dv \quad (2)$$

والحجم المقصود بالتكامل السابق، هو الحجم الذي يحتضن المجال المغناطيسي، أي أنه حجم المغناطيس ( $A \ell$ ) وحجم القطعة التي تحده ( $Ad$ ) وحجم الفراغ بين القطعة والمغناطيس ( $2Ay$ ). ولإيجاد  $B$  في

المعادلة (2)، فإننا سنستخدم مفهوم الدارات المغناطيسية، أي أن:

$$\Phi = \frac{NI}{R_m + R_g + R_p} \quad (\text{التدفق المغناطيسي، حيث أنه ثابت})$$

$R_m$  : مقاومة المغناطيس.

$R_g$  : المقاومة المغناطيسية للفجوة بين القطعة والمغناطيس.

$R_p$  : المقاومة المغناطيسية للقطعة.

ولهذا يكون:

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{\ell}{\mu A} + \frac{2y}{\mu_0 A} + \frac{d}{\mu A}} = \frac{NI}{\frac{\ell+d}{\mu A} + \frac{2y}{\mu_0 A}}$$

ولكن:

$$B = \frac{\Phi}{A}, \quad \Phi_g = \Phi_p = \Phi_m = \Phi$$

$$B_g = B_p = B_m = \frac{\Phi}{A} = \frac{NI}{\frac{\ell+d}{\mu} + \frac{2y}{\mu_0}} = \frac{NI \mu \mu_0}{\mu_0 (\ell+d) + 2y \mu}$$

حيث:

$B_g$  : المجال المغناطيسي في الفجوة بين القطعة والمغناطيس.

$B_m$  : المجال في المغناطيس.

$B_p$  : المجال المغناطيسي في القطعة.

وبما أن المجالات المغناطيسية الثلاثة السابقة متساوية، فإن:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} \, dv = \frac{1}{2} \int_{\text{المغناطيس}} \frac{B^2}{\mu} \, dv + \frac{1}{2} \int_{\text{الفجوة}} \frac{B^2}{\mu_0} \, dv + \frac{1}{2} \int_{\text{القطعة}} \frac{B^2}{\mu} \, dv$$

$$= \frac{B^2}{2} \left[ \frac{V_m}{\mu} + \frac{V_g}{\mu_0} + \frac{V_p}{\mu} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{NI \mu \mu_0}{\mu_0 (\ell+d) + 2y \mu} \right]^2 \cdot \left[ \frac{A \ell}{\mu} + \frac{2yA}{\mu_0} + \frac{Ad}{\mu} \right]$$

$$\begin{aligned} \therefore U(y) &= \frac{A}{2} \frac{N^2 I^2 \mu \mu_0}{\mu_0 (\ell + d) + 2 y \mu} \\ F_y = \frac{dU}{dy} &= - \frac{AN^2 I^2 \mu \mu_0 (2 \mu)}{2[\mu_0 (\ell + d) + 2 y \mu]^2} = - \frac{N^2 I^2 \mu^2 \mu_0 A}{[\mu_0 (\ell + d) + 2 y \mu]^2} \\ \therefore F_y|_{y=0} &= - \frac{N^2 I^2 \mu^2 A}{(\ell + d)^2 \mu_0} \end{aligned}$$

أما اتجاه القوة أعلاه فسيكون باتجاه نقصان  $y$ . أي إلى الأسفل.

( - )

احسب القوة بين دارتين صلبتين متجاورتين، تحملان تيارين

ثابتين. كما في الشكل رقم (٣-٧)



الشكل رقم (٣-٧)

الحل:

تحسب القوة بين دارتين صلبتين عند ثبوت التيارات من العلاقة:

$$\vec{F} = \nabla U \quad (1)$$

وبالتالي نحتاج لحساب الطاقة المغناطيسية  $U$  للنظام، ويمكن حسابها

لنظام مؤلف من دارتين ( $N=2$ ) حسب المعادلة (14)، على النحو التالي:

$$U = \frac{1}{2} \sum_1^2 M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} M_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} M_{21} I_2 I_1 + \frac{1}{2} M_{22} I_2^2$$

$$= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \quad (2)$$

وتكون القوة  $(\vec{F}_2)$  المؤثرة على الدارة 2 عند ثبوت التيارات، حسب المعادلة (1)، كما يلي:

$$\vec{F}_2 = \vec{\nabla}_2 U = \vec{\nabla}_2 \left( \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \right) \quad (3)$$

ولكن حسب علاقة نيومان، فإن:

$$M = \frac{\mu_0}{4 \pi} \iint_{C_2} \iint_{C_1} \frac{d \ell_1 \cdot d \ell_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (4)$$

$$L = \frac{\mu_0}{4 \pi} \iint_{C_1} \iint_{C_1} \frac{d \ell_1 \cdot d \ell_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'_1|} \quad (5)$$

ونلاحظ من العلاقتين السابقتين أن حساب المحاثة المتبادلة  $(M)$  بين الدارتين يعتمد على البعد  $\vec{r}_2$  بينما حساب المحاثة الذاتية  $(L_2, L_1)$  لا يعتمد على البعد  $\vec{r}_2$ . وبالتالي فإن المعادلة (3) تؤول إلى:

$$\vec{F}_2 = I_1 I_2 \vec{\nabla}_2 M \quad ; \quad \left[ \vec{\nabla}_2 L_1 = \vec{\nabla}_2 L_2 = 0 \right]$$

وبالتعويض عن  $M$  في المعادلة السابقة من المعادلة (4)، نحصل على:

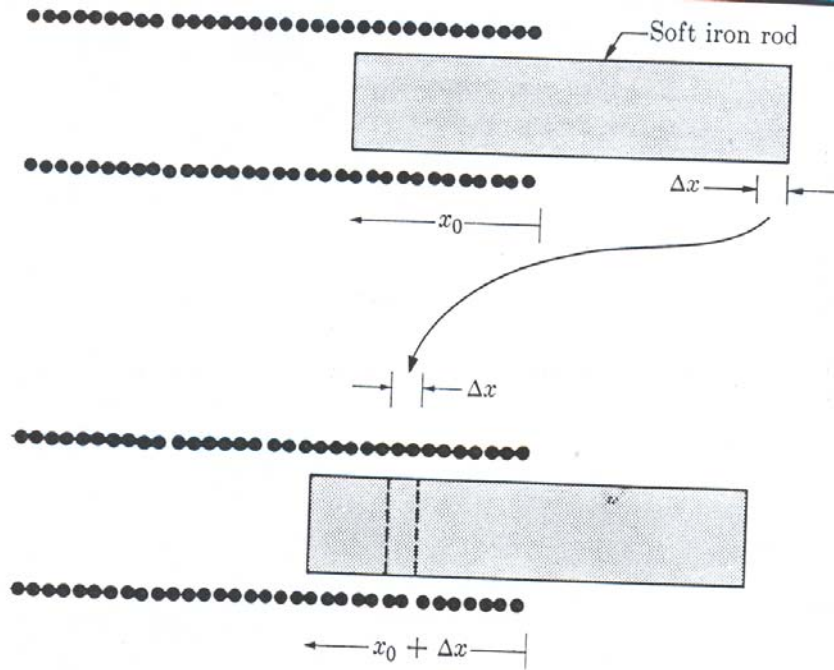
$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= I_1 I_2 \vec{\nabla}_2 \left[ \frac{\mu_0}{4 \pi} \iint_{C_2} \iint_{C_1} \frac{d \ell_1 \cdot d \ell_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right] = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4 \pi} \iint_{C_2} \iint_{C_1} (d \ell_1 \cdot d \ell_2) \vec{\nabla}_2 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'_1|} \\ \therefore \vec{F}_2 &= - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4 \pi} \iint_{C_2} \iint_{C_1} (d \ell_1 \cdot d \ell_2) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}'_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}'_1|^3} \quad (6) \end{aligned}$$

وبتحديد الشكل الهندسي للدارتين والبعد بينهما، يمكننا إجراء التكامل السابق. كما يمكن إثبات أن المعادلة (6) تكافئ تماماً المعادلة التي حصل عليها أمبير تجريبياً وهي:

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_2 \times [d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

( - )

ملف لولبي طويل عدد لفاته  $N$  وطوله  $L$  ويمر به تيار  $I$  وبداخله قالب حديدي ثابت نفاذيته  $\mu$  ومساحة مقطعه  $A$ . إذا سُحِب نصف القالب من داخل الملف. كما في الشكل رقم (٧-٤)، فاحسب القوة المغناطيسية (التقريبية) التي تؤثر في القالب الحديدي.



الشكل رقم (٧-٤)



## الحل:

لقد طُلب في هذا المثال حساب القوة المغناطيسية التقريبية، والسبب في ذلك أن التدفق المغناطيسي عند حافتي الملف غير ثابت. ولو أردنا حسابها بشكل دقيق لتعقدت المسألة، لذلك سنهمل هذه التأثيرات التي تنشأ عن عدم انتظام المجال عند حافتي الملف وبالتالي ستكون القوة المحسوبة تقريبية.

يمكن حساب القوة  $F_x$  (طبعاً  $F_y$  و  $F_z$  تساويان صفراً لعدم وجود إزاحة في ذلك الاتجاه) في حالة ثبوت تيار الدارة  $I$ ، من العلاقة:

$$F_x = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_I = \frac{dU}{dx} = \frac{\Delta U}{\Delta x} \Big|_I \quad (1)$$

وحسب المعادلة السابقة، فإننا نحتاج لحساب فرق الطاقة  $(\Delta U)$  لوضعين مختلفين، المسافة بينهما  $\Delta x$ .

لنفرض أن حافة القالب اليسرى على بعد  $x_0$  من حافة الملف، وأن الطاقة في هذه الحالة  $U_1$ . وإذا تحرك القالب للداخل مسافة  $\Delta x$ ، فإن طاقته تصبح  $U_2$  مثلاً. وتحسب  $U$  بشكل عام من العلاقة:

$$U = \int_V u \, dv = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} \, dv = \frac{1}{2} \int \mu H^2 \, dv \quad (2)$$

وحيث إن اتجاه  $\vec{H}$  مواز لمحور الملف (باتجاه  $x$ ) فإنها تمثل شدة المجال المماسي  $H_t$ ، وحسب الشرط الحدي لهذه الكمية، فإن انتقالها من وسط مغناطيسي ( $\mu$ ) إلى وسط آخر مثل الهواء ( $\mu_0$  تقريباً)، يحافظ على استمرارية  $H_t$ . أي أن  $\vec{H}$  ثابتة داخل القالب وخارجه.

$$\therefore U_1 \Big|_{x_0} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 (L - x_0) A + \frac{1}{2} \mu H^2 (x_0) A$$

$$U_2|_{x_0+\Delta x} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 (L - x_0 - \Delta x) A + \frac{1}{2} \mu H^2 (x_0 + \Delta x) A$$

إذاً، فإن فرق الطاقة  $\Delta U$  عند عمل إزاحة مقدارها  $\Delta x$ ، تساوي:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2} \mu H^2 \Delta x A - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \Delta x A = \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) H^2 A \Delta x \quad (3)$$

[لاحظ أن النتيجة السابقة عبارة عن تغير الطاقة في الحجم  $A \Delta x$ . فهذا الحجم كان مملوءاً بالمادة المغناطيسية وأصبح فراغاً].

ومن المعادلة السابقة، فإن:

$$F_x = \frac{\Delta U}{\Delta x} \Big|_I \cong \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) H^2 A \quad (4)$$

وحيث إن:

$$H = \frac{N I}{\ell}$$

$$\therefore F_x \cong \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2 A}{\ell^2} \quad (5)$$

وتؤثر القوة  $F_x$  باتجاه زيادة  $x_0$ . أي إلى اليسار. وبالتالي تعمل هذه القوة دائماً على إعادة القالب إلى مكانه الأصلي في حالة محاولتنا لسحبه من الداخل.

( - )

يكون المجال المغناطيسي بين قطبي مغناطيس كهربائي تناظراً نسبياً، وذا قيمة ثابتة قدرها  $\bar{B}_0$  مثلاً. فإذا وضع لوح من مادة بارامغناطيسية في هذا المجال قابلية تمغنطها  $\chi_m$  ومساحة مقطعها  $A$ ، وأجبر هذا اللوح على حركة عمودية في المجال كما في الشكل المجاور، فأوجد القوة المؤثرة على اللوح. وإذا كان هذا اللوح من التيتانيوم

حيث  $\chi_m = 1.8 \times 10^{-4}$  و  $A = 1 \text{ cm}^2$  و  $B_0 = 0.25 \text{ T}$  ، فأوجد قيمة هذه القوة (أهمل تأثير الحواف).

الحل:

بما أن التدفق  $\Phi$  ثابت، فإن:

$$F_y = - \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{\Phi} = - \left( \frac{dU}{dy} \right)_{\Phi} = - \left( \frac{\delta U}{\delta y} \right)_{\Phi}$$

حيث  $\delta U$  التغير في الطاقة المغناطيسية نتيجة إزاحة بسيطة  $\delta y$  .  
وهذا التغير  $\delta U$  نتيجة تغير الحجم المعرض للمجال المغناطيسي ومقدار هذا الحجم يساوي  $A \delta y$  .

ويمكن حساب  $\delta U$  نتيجة الإزاحة  $\delta y$  على النحو التالي:

$$\delta U = \delta u \times A \delta y$$

حيث  $\delta u$  : التغير في كثافة الطاقة في الحجم  $A \delta y$  ويمكن إيجاده على النحو التالي:

(كثافة الطاقة في الحجم  $A \delta y$  قبل الإزاحة) - (كثافة الطاقة في

الحجم  $A \delta y$  بعد الإزاحة)  $\delta u =$

$$\delta u = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} - \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu} = \frac{B_0^2}{2} \left( \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \right)$$

$$\therefore \delta U = \frac{B_0^2}{2} \left( \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \right) A \delta y$$

ومنها فإن:

$$F_y = - \left. \frac{\delta U}{\delta y} \right|_{\Phi} = - \frac{B_0^2 (\mu - \mu_0) A}{2 \mu \mu_0} = \frac{-B_0^2}{2 \mu} A \left( \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right)$$

$$= -\frac{B_0^2 A}{2\mu} \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) = \frac{-B_0^2 A \chi_m}{2\mu_0 (1 + \chi_m)}$$

$$F_y = -\frac{B_0^2 A \chi_m}{2\mu_0 (1 + \chi_m)}$$

ونظراً لأن  $\chi_m > 0$  للمواد البارامغناطيسية، فإن القوة  $F_y$  يجب أن  
تعاكس أية زيادة في  $y$

$$\left| F_y \right|_{\text{للتيتانيوم}} = \frac{(0.25)^2 \times 10^{-4} \times 1.8 \times 10^{-4}}{2 \times 4 \pi \times 10^7 (1 + 1.8 \times 10^{-4})} = 4.5 \times 10^{-4} \text{ N}$$

:

أعد حل المثال (٧-١)، إذا علمت أن المحاثة الذاتية للملف اللولبي

تعطى بالعلاقة:

$$L = \mu_0 n^2 A \ell$$

حيث A: مساحة مقطع الملف.

:

احسب الطاقة المغناطيسية المخزنة في الملف الحلقي (Toriod)،

عندما يمر تيار I خلاله.

:

إذا أضيف ملف حلقي ثالث حول الملفين الحلقيين المذكورين في

المثال (٧-٣) ومر خلاله تيار  $I_3$  بنفس اتجاه التيارين  $I_1$  و  $I_2$  ، فاحسب

الطاقة المغناطيسية المخزنة في النظام.

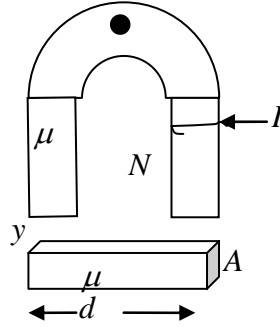
:

في المثال (٧-٥)، إذا علمت أن  $N = 100$  و  $I = 1$  A و  $\mu = \mu_0$  و

$A = 5$  cm<sup>2</sup> و  $\ell = 30$  cm و  $d = 8$  cm وكتلة القطعة 0.5 kg، فهل

يستطيع المغناطيس الكهربائي، إذا ثبت كما في الشكل رقم (٧-٥)، أن

يحمل القطعة التي طولها 58 cm



الشكل رقم (٥-٧)

:

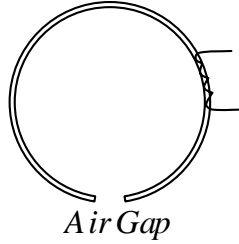
مغناطيس كهربائي على شكل ملف حلقي كما في الشكل رقم

(٦-٧). أثبت أن قوة التجاذب بين فكي المغناطيس تعطى بالعلاقة:

$$F = \frac{B^2 S}{2 \mu_0}$$

حيث B: المجال المغناطيسي في الفجوة

S: مساحة مقطع المغناطيس.



الشكل رقم (٦-٧)

:

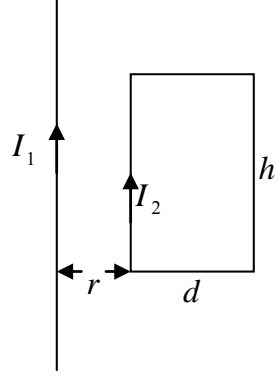
في السؤال (٧-٥) إذا علمت أن المجال في فجوة الهواء يساوي 1.4 T

ومساحة مقطع المغناطيس  $S = 10^{-4} \text{ m}^2$  ، فأوجد قوة التجاذب F بين

فكي المغناطيس.

:

أوجد القوة بين سلك طويل وعروة مستطيلة الشكل أبعادها  $h$  و  $d$ ، إذا مر خلالهما تياران  $I_1$  و  $I_2$  على الترتيب، وكانا يقعان في نفس المستوى والبعد بينهما، كما في الشكل رقم (٧-٧).



الشكل رقم (٧-٧)





## معادلات ماكسويل

-

لقد قمنا بدراسة معادلات ماكسويل في أماكن متفرقة من هذا الكتاب، دون الإشارة إلى أن تلك المعادلات على أنها هي معادلات ماكسويل. وفي الحقيقة أن ماكسويل لم يكتشف هذه المعادلات، وإنما كانت نتاج تجارب عملية وجدت قبله بكثير، وهذه التجارب قام بها كولوم وجاوس وأمبير، وفارادي. والذي ساهم به ماكسويل عام 1862 أنه جمع تلك المعادلات وعددها أربع، وحورها لتخدم المجالات الكهرومغناطيسية. وتبلغ هذه المعادلات من الأهمية في النظرية الكهرومغناطيسية أهمية معادلات قوانين نيوتن في الحركة.

وسندرس في هذا الفصل معادلات ماكسويل والتحويلات التي حصلت عليها. كما سندرس مفهوم توزيع بوينتغ وعلاقته بالقدرة. ثم سندرس معادلة الموجة المستوية والشروط الحدودية للمتجهات  $\vec{E}$ ،  $\vec{B}$ ،  $\vec{H}$  و  $\vec{D}$ . وأخيراً سندرس معادلة الموجة في حالة وجود مصادر.

وقبل البدء بالتفصيل، نود التذكير ببعض التعريفات الهامة

التالية:

يكون الوسط متجانساً (homogeneous). إذا كانت خصائص الوسط لا تختلف من نقطة إلى أخرى. ويكون الوسط سوي الخواص

(isotropic)، إذا كانت خصائص الوسط عند نقطة معينة متساوية في جميع الاتجاهات. ويكون الوسط خطياً (linear) وسوي الخواص (isotropic)، إذا انطبقت على ذلك الوسط العلاقات التالية:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} ; \vec{B} = \mu \vec{H} ; \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

حيث إن  $\epsilon$ ،  $\mu$  و  $\sigma$  ثوابت لا تعتمد على  $\vec{E}$  و  $\vec{H}$  ولا تعتمد على الاتجاه والزمن.

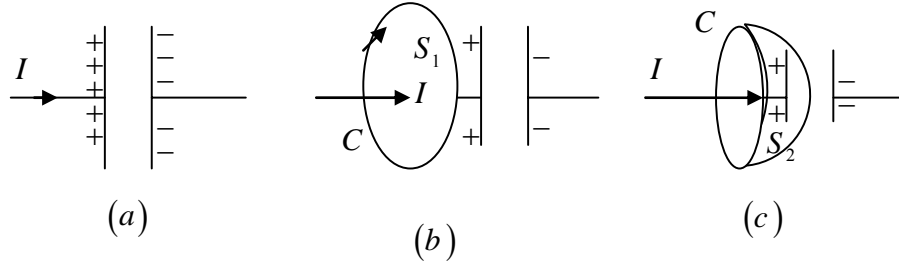
يُمثل قانون أمبير للدارات الكهربائية إحدى معادلات ماكسويل الأربع، ويكتب هذا القانون بصيغته المعروفة لنا على النحو التالي:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} da = I$$

إلا أن هذا القانون بصيغته المعروفة أعلاه، أثبت فشلاً في بعض الأحيان عند تطبيقه على بعض الحالات بسبب التناقضات في النتائج. لهذا وجب إجراء بعض التعديل عليه. وفيما يلي مثال على أحد التناقضات المذكورة في القانون.

افترض الدارة المبينة في الشكل رقم (8-1) (a)، وهي عبارة عن مكثف صغير ذي صفيحتين متوازيتين. ولنفرض بأن المكثف يُشحن بتيار ثابت  $I$  (لا ضرورة لمعرفة كيفية منشأ هذا التيار). وبتطبيق قانون أمبير للمسار المغلق  $C$  والسطح  $S_1$ ، مثلاً، كما في الشكل رقم (8-1) (b) نجد أن:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_1} \vec{J} \cdot \hat{n}_1 da = I \quad (8-1)$$



الشكل رقم (8-1)

ونلاحظ من تطبيق المعادلة (8-1) على الشكل (1b)، أن  $C$  عبارة عن المسار المغلق المحيط بالتيار  $I$ ، وأن  $S_1$  عبارة عن السطح الذي يحتضنه المسار المغلق  $C$ ، ويخترقه التيار  $I$ .

أما إذا طبقنا قانون أمبير مرة أخرى على نفس المسار المغلق  $C$  المذكور في الحالة السابقة، ولكننا سنجعل المسار  $C$  يحتضن سطحاً آخرًا هو  $S_2$ ، على شكل نصف قشرة كروية مثلاً، كما في الشكل (1c)، بحيث لا يُخترق هذا السطح من قبل التيار  $I$ . وستكون نتيجة تطبيق قانون أمبير كما يلي:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_2} \vec{J} \cdot \hat{n}_2 da = 0 \quad (8-2)$$

فالتناقض واضح من النتيجتين اللتين حصلنا عليهما [المعادلة (8-1) والمعادلة (8-2)]. وقد يتبادر إلى الذهن بأن المعادلة (8-1) صحيحة، بينما (8-2) ليست صحيحة لأنها احتوت على هيئة جديدة وهي إضافة إحدى صفيحتي المكثف. وفي الحقيقة أن قانون أمبير يجب أن ينطبق على الحالتين المذكورتين بدون تناقض. وحتى لا يوجد مثل هذا التناقض، قام ماكسويل بإيجاد صياغة عامة لهذا القانون بإجراء التعديل المناسب عليه.

لقد نشأ التناقض في المثال المذكور أعلاه بسبب اختلاف التكامل السطحي في المعادلتين (8-1) و (8-2). أي أن:

$$\int_{S_2} \vec{J} \cdot \hat{n}_2 da - \int_{S_1} \vec{J} \cdot \hat{n}_1 da \neq 0$$

وبما أن السطحين  $S_1, S_2$  يشكلان معاً سطحاً مغلقاً يلتقيان معاً عند المنحنى  $C$ . وعلى اعتبار أن قيمة متجه الوحدة  $\hat{n}_1$  داخل في السطح ومنتجه الوحدة  $\hat{n}_2$  خارج منه، فإنه يمكن التعبير عن المعادلة السابقة بصياغة أخرى على النحو التالي:

$$\int_{S_1 + S_2} \vec{J} \cdot \hat{n} da \neq 0 \quad (8-3)$$

وتعني المعادلة (8-3) أن محصلة التيار الانتقالي (transport current) [يعرف أيضاً بتيار التوصيل (conduction current)] خلال السطح المغلق، لا يتلاشى بسبب تراكم الشحنة على صفيحة المكثف الموجودة داخل السطح المغلق مع مرور الزمن. فقانون حفظ الشحنة يتطلب أن يكون التيار الخارج من السطح المغلق ( $S_1 + S_2$ ) خلال زمن  $\Delta t$  مساوياً لمعدل تناقص الشحنة خلال الحجم  $V$  المحاط بالسطح  $S_1 + S_2$ . أي أن:

$$\oint_{S_1} \vec{J} \cdot \hat{n} da = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (8-4)$$

حيث تمثل  $\rho$  كثافة الشحنة الحجمية داخل الحجم  $V$  والمحاط بالسطح  $S_1 + S_2$ . وهذه الكثافة متغيرة مع الزمن على صفيحتي المكثف. وحيث إن:

$$\oint_{S_1 + S_2} \vec{J} \cdot \hat{n} da = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dv \quad [\text{نظرية التفرق لجاوس}]$$

فإنه يمكن كتابة قانون حفظ الشحنة (المعادلة 8-4). على النحو التالي:

$$\oint_{S_1+S_2} \vec{J} \cdot \hat{n} da = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dv = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

ومنها فإن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (8-5)$$

ويمكن الآن للمعادلة (8-5) أن تكشف لنا الخلل الذي حصل في المعادلتين (8-1) و (8-2).

فلقد تم اشتقاق المعادلتين (8-1) و (8-2)، أصلاً من العلاقة التالية:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (8-6)$$

فإذا أخذنا التفرق لطرفي المعادلة (8-6)، فإننا نحصل على:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (8-7)$$

ولكننا نعلم بأن التفرق لأي لف يساوي صفرًا دائماً. أي أن:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة (8-7) تساوي صفرًا. أي أن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

لكن العلاقة السابقة لا تتفق مع قانون حفظ الشحنة (المعادلة 8-5) بسبب وجود حد ناقص  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$  فيها. ويمكننا إيجاد هذا الحد على النحو

التالي:

معلوم لدينا أن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

وبالتعويض عن  $\rho$  من العلاقة السابقة في المعادلة (8-5). نحصل على:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ومنها فإن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right]$$

ونلاحظ من العلاقة السابقة أن الحد الذي يجب إضافته للمعادلة (8-6) هو  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ . وفي حالة إضافة هذا الحد، فإن المعادلة (8-6) ستصبح على النحو التالي:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_D = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (8-8)$$

ويعرف الحد  $\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  بحد تيار الإزاحة وهي إحدى إضافات ماكسويل الرئيسية للنظرية الكهرومغناطيسية.

وتشير المعادلة (8-8) إلى أن  $\vec{\nabla} \times \vec{H}$  لا تنشأ فقط عن التيار الانتقالي الممثل بالكمية  $\vec{J}$ ، بل هناك تيار آخر يعرف بتيار الإزاحة، وينشأ هذا التيار نتيجة تغير المجال الكهربائي مع الزمن، ونلاحظ بأن هذا التيار يزداد بزيادة معدل تغير المجال الكهربائي مع الزمن، ويتلاشى في الحالات الاستاتيكية  $\left[ \vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \right]$ .

ويمكننا كتابة المعادلة (8-8) على شكل تكاملات، على النحو

التالي:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} da + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} da$$

### Maxwell's Equations

ذكرنا سابقاً أن معادلات ماكسويل الأربع، ما هي إلا نتاج لتجارب عملية قام بها آخرون. فالبعض يعطي هذه المعادلات أرقاماً بتسلسل

معين، وهي فكرة جيدة إلا أنها غير ملزمة، وقد تختلف من كتاب لآخر. وفيما يلي سنستعرض تلك المعادلات مع بعض التعليقات عليها من باب تعزيز أفكارها.

- - :

معادلة ماكسويل الأولى ما هي إلا قانون فارادي في الحث الكهرومغناطيسي، وهي:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (8-10)$$

المعادلة (8-10)، تصف العلاقة بين المجال الكهربائي  $\vec{E}$ ، وتدفق المجال المغناطيسي  $\Phi$  المتغير مع الزمن.

فإذا تخيلنا سلكاً يُشكل مساراً مغلقاً، كما في الشكل رقم (٢-٨)، فإن تغير التدفق المغناطيسي  $\Phi$  خلال سطح  $S$  محاط بالمسار  $C$  سيولد قوة دافعة كهربائية تأثيرية  $\mathcal{E}$ ، تعطى بالعلاقة:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (8-11)$$

فإذا قطعنا السلك  $C$  وقسنا  $\mathcal{E}$  المتولدة بين طرفيه (الشكل رقم ٢-٨)، فسنجد أن  $\mathcal{E}$  تشكل قوى دافعة كهربائية متعددة متولدة في أجزاء السلك، وكأنها قوى دافعة كهربائية متصلة على التوالي، كما هو موضح في الشكل رقم (٣-٨).

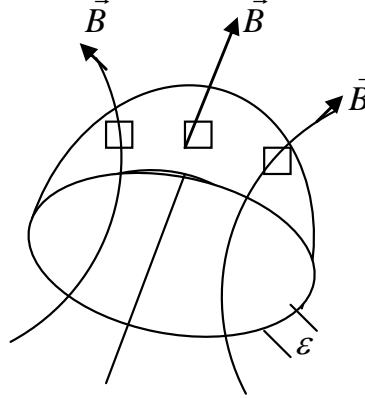
ويمكننا تحويل المعادلة (8-10) إلى معادلة تفاضلية لا تعتمد على أي مسار بحيث تتحقق عند أي نقطة في الفضاء، وذلك بتطبيق نظرية ستوكس على الطرف الأيسر لتلك المعادلة، على النحو التالي:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} da = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da$$

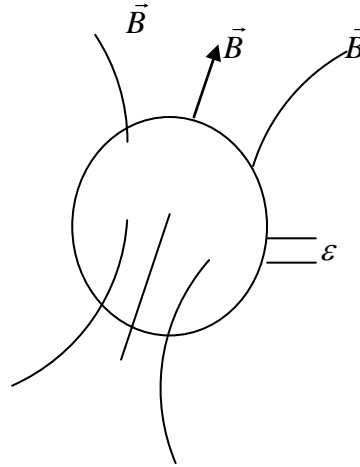
وحيث إن العلاقة السابقة صحيحة لأي سطح نختاره، فإن التكاملين متساويان. أي أن:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8-12)$$

وتعرف المعادلة (8-12) بقانون ماكسويل بالشكل النقطي (point form).



شكل رقم (٢-٨)



شكل رقم (٣-٨)



) : - - (

إن معادلة ماكسويل الثانية ما هي إلا قانون غاوس في الكهرباء والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, da = \frac{Q}{\epsilon} \quad (8-13)$$

وتشير المعادلة السابقة إلى أن التدفق الكلي  $\Phi_E$  للمجال الكهربائي  $\vec{E}$  من سطح مغلق  $S$  يساوي الشحنة المحصلة  $Q$  داخل ذلك السطح مقسومة على ثابت  $\epsilon$ . ونلاحظ من هذا القانون أنه يربط بين المجال الكهربائي  $\vec{E}$  وتوزيعات الشحنة  $Q$ .

ويُكتب قانون غاوس أعلاه بدلالة متجه الإزاحة  $\vec{D}$  على النحو

التالي:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} \, da = Q \quad (8-14)$$

وبالإمكان تحويل المعادلة السابقة إلى معادلة تفاضلية لا تعتمد على المساحة، وذلك بتطبيق نظرية التفريق على الطرف الأيسر لتلك المعادلة، وبالتعويض كذلك عن الشحنة  $Q$  بدلالة كثافة الشحنة الحجمية  $\rho$ .

أي أن:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, dv = \int_V \rho \, dv$$

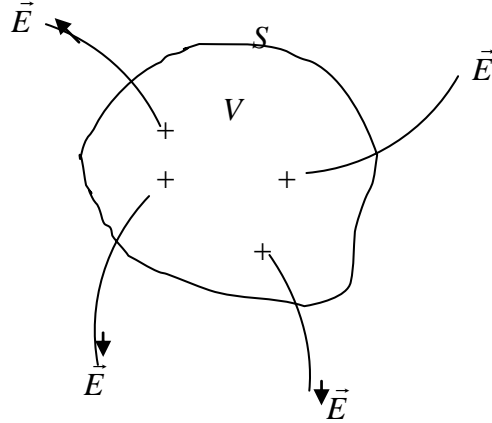
ونظراً لأن المعادلة السابقة صحيحة لأي حجم نختاره، فإن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (8-15)$$

ويبين الشكل رقم (٨ - ٤) توضيحاً لقانون غاوس (معادلة

ماكسويل الثانية)، حيث إن عدد خطوط المجال  $\vec{E}$  الخارجة من الحجم

$V$  والممثل بالسطح المغلق  $S$ ، يساوي الشحنة المحصلة  $Q$  التي بداخله مقسومة على الثابت  $\epsilon$ .



الشكل رقم (٨-٤)

:-

لقد قمنا بإجراء تحويل معين في البند (٨-٣-٢) على قانون أمبير بصيغته المعروفة ووضعه بصورة عامة. وكان لابد من هذه الصياغة الجديدة لقانون أمبير تفادياً لحصول تناقضات في تطبيقه، واعتبرت هذه الصياغة مساهمة ماكسويل الرئيسية في موضوع النظرية الكهرومغناطيسية. ويكتب قانون أمبير بصياغته العامة، على النحو التالي:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} da + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} da \quad (8-16)$$

وتصف المعادلة السابقة الشدة المغناطيسية  $\vec{H}$  وعلاقتها بالتيارين الانتقالي  $\vec{J}$  والإزاحة  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ . أي أن الشدة المغناطيسية تنشأ من مصدرين هما:  $\vec{J}$  و  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

وبتطبيق نظرية ستوكس على الطرف الأيسر للمعادلة (8-16)،

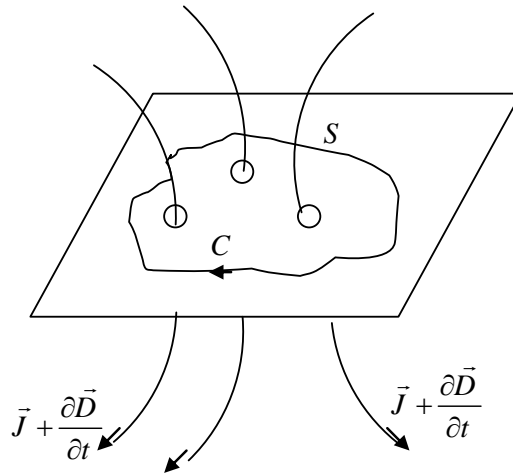
فإننا نحصل على:

$$\oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} da = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} da + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} da$$

وبما أن المعادلة السابقة صحيحة لأي سطح  $S$  نختاره، فإننا نستنتج أن:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (8-17)$$

ويبين الشكل رقم (8-5) توضيحاً لقانون أمبير (معادلة ماكسويل الثالثة)، حيث إن التكامل الخطي للكمية  $\vec{H}$  حول مسار مغلق  $C$  والذي يحتضن المساحة  $S$ ، يساوي مجموع التيارين: الانتقالي والإزاحة الواقعة داخل المسار المغلق أو المساحة  $S$ .



الشكل رقم (8-5)

( ) : - -

بينما في دراستنا السابقة كيفية ربط المجال الكهربائي  $\vec{E}$  بمصادره، وعلى غرارها بينا كيفية ربط المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  بمصادره أيضاً، فكان بالإمكان الحصول على شحنات كهربائية منفردة  $Q$ ، بحيث يكون

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} \, da = Q$$

بينما لم نتمكن مطلقاً من الحصول على قطب مغناطيسي منفرد، فكان التدفق المغناطيسي  $\Phi_B$  من سطح مغلق يساوي دائماً صفرًا. أي أن:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, da = 0 \quad (8-18)$$

وتُعرف المعادلة (8-18) بقانون جاوس في المغناطيسية، وكذلك بمعادلة ماكسويل الرابعة.

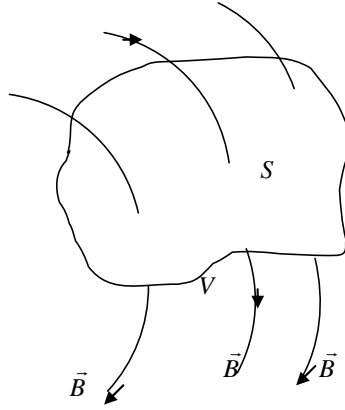
ويمكن تحويل المعادلة (8-18) إلى معادلة تفاضلية لا تعتمد على المساحة وذلك بتطبيق نظرية التفريق (divergence theorem) على الطرف الأيسر، على النحو التالي:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, da = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dv = 0$$

ومنها نستنتج أن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8-19)$$

ويبين الشكل رقم (٨-٦) توضيحاً لقانون غاوس في المغناطيسية (معادلة ماكسويل الرابعة)، حيث إن محصلة عدد خطوط المجال المغناطيسي  $\vec{B}$  المتدفقة من السطح المغلق  $S$  والذي يحتضن الحجم  $V$  يساوي دائماً صفرًا. لاحظ أن الخط الذي يدخل السطح المغلق  $S$ ، أو الحجم  $V$ ، يجب أن يخرج منه.



الشكل رقم (٨-٦)

ويمكننا تلخيص معادلات ماكسويل الأربع، انظر جدول رقم (٨-١)، بأشكالها التكاملية (Integral form) وأشكالها التفاضلية (differential form) أو النقطية (point form) على النحو التالي:

جدول رقم (٨-١) معادلات ماكسويل (Maxwell's Equations)

على شكل تفاضلي (نقطي)	على شكل تكاملات	
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} da$	المعادلة الأولى: قانون فارادي
$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = \int_V \rho dv$	المعادلة الثانية: قانون جاوس
$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} da + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} da$	المعادلة الثالثة: قانون أمبير
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0$	المعادلة الرابعة: قانون جاوس

إن معادلات ماكسويل أعلاه تبقى غامضة ما لم تعرف العلاقات التركيبية فيما بين الكميات  $\vec{E}$  و  $\vec{D}$  و  $\vec{B}$  و  $\vec{H}$  و  $\vec{J}$  لوسط معين. والعلاقات التركيبية بين الكميات السابقة لوسط خطي (linear) ومتجانس (homogeneous) وسوي الخواص في جميع الاتجاهات (isotropic) هي:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} ; \vec{B} = \mu \vec{H} ; \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

حيث:  $\epsilon, \mu, \sigma$  ثوابت لا تعتمد على الزمن و  $\vec{E}$  و  $\vec{H}$ .

نلاحظ مما سبق أن معادلات ماكسويل عبارة عن معادلات خطية تربط المجالات الكهرومغناطيسية بمصادرها  $\rho$  و  $\vec{J}$ . والصفة الخطية تعني إمكانية تطبيق مبدأ التراكب (superposition principle). فإذا وُكِّد كل مصدر ( $\rho$  و  $\vec{J}$ ) مجاله على انفراد، فإن المجال المحصل والنتائج عن عدة مصادر يساوي محصلة المجالات الناشئة عن كل مصدر على حدة. ومعادلات ماكسويل الأربع بالإضافة إلى قانون قوة لورنتز (Lorentz Force) التالية:

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

تُشكل القوانين الكلاسيكية الأساسية للنظرية الكهرومغناطيسية.

-

بيئاً سابقاً أن الطاقة الكهرومغناطيسية (Electrostatic Energy) لمنظومة من الشحنات الكهربائية المسببة للمجال الكهربائي والمختزنة فيه، وتعطى بالعلاقة:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} \, dv$$

وبالمثل، فإن الطاقة المغناطيسية المخزنة في المجال المغناطيسي، تعطى بالعلاقة:

$$U_B = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} \, dV$$

وسنناقش فيما يأتي مدى ملاءمة الصيغتين السابقتين للحالات غير الاستاتيكية (أي للمجالات المتغيرة مع الزمن).

بضرب معادلة ماكسويل الرابعة [المعادلة (8-17)] نقطياً (dot product) بالمتجه  $\vec{E}$ ، نحصل على:

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \left[ \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (8-20)$$

وبضرب طرفي معادلة ماكسويل الأولى [المعادلة (8-12)] نقطياً (dot product) بالمتجه  $\vec{H}$ ، نحصل على:

$$\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8-21)$$

وبطرح المعادلة (8-20) من المعادلة (8-21)، نحصل على:

$$\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

وعلى غرار المتطابقة [  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$  ]، فإن:

$$\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (8-22)$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

فإذا كان الوسط المراد تطبيق المعادلة (8-22) عليه، وسطاً خطياً (linear)، فهذا يعني أن:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} ; \vec{B} = \mu \vec{H}$$

وبالتالي يمكننا إيجاد قيمة الحدين:  $\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  ،  $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  ، على

الطرف الأيمن للمعادلة (8-22)، على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{H} \cdot \frac{\partial (\mu \vec{H})}{\partial t} = \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \vec{H}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

وكذلك فإن:

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{E} \cdot \frac{\partial (\epsilon \vec{E})}{\partial t} = \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D}) \end{aligned}$$

وبالتعويض عن النتيجتين السابقتين في المعادلة (8-22)، نحصل على:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

ومنها، فإن:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right) - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (8-23)$$

ولكن:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} &= u_m \quad (\text{كثافة الطاقة المغناطيسية}) \\ \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} &= u_E \quad (\text{كثافة الطاقة الكهربائية}) \end{aligned}$$

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (8-23) على النحو التالي:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} (u_m + u_E) - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (8-24)$$



ويُمثل الحد الأول على الطرف الأيمن للمعادلة (8-24) المشتقة الزمنية لمجموع كثافتي الطاقة الكهربائية والمغناطيسية، بينما يمثل الحد الثاني فيها، المعدل الزمني السالب للطاقة الحرارية المبددة في وحدة الحجم.

وبإجراء التكامل الحجمي لطرفي المعادلة (8-23) حول حجم ثابت

مثل  $V$  محاط بالسطح  $S$  فإننا نحصل على:

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv = -\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{D}}{2} \right) dv - \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv$$

وبتطبيق نظرية التفرق (divergence theorem) على الطرف الأيسر للعلاقة السابقة، نحصل على:

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} da = -\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \right) dv - \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv \quad (8-25)$$

وحيث إن وحدة المجال  $\vec{E}$  هي  $\frac{V}{m}$ ، ووحدة  $\vec{H}$  هي  $\frac{A}{m}$ ، فإن وحدة حاصل ضربهما معاً (أي الكمية  $E H$ ) هي  $\frac{A \cdot V}{m^2}$  أو  $\frac{Watt}{m^2}$ . وهذا يعني

أن الكمية المتجهية  $\vec{E} \times \vec{H}$  على الطرف الأيسر للمعادلة (8-25) ما هي إلا الطاقة التي تتساب في وحدة الزمن من وحدة المساحة  $S$ . أو بمعنى آخر أن قيمة  $\vec{E} \times \vec{H}$  تمثل كثافة القدرة (power density)، وتعرف هذه

الكمية بمتجه بوينتغ  $\vec{S}$  (Poynting Vector). أي أن:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (8-26)$$

وتجدر الإشارة هنا إلى أن اتجاه المتجه  $\vec{S}$  يكون عمودياً دائماً على المستوى المؤلف من المجالين  $\vec{E}$  و  $\vec{H}$ ، وباتجاه تدفق الطاقة. فإذا كان التكامل السطحي لمتجه بوينتغ سالباً فهذا يعني أن الطاقة في تلك اللحظات تتدفق إلى داخل السطح، ونحصل على هذه الحالة عندما يكون

المتجه  $\vec{S}$  باتجاه مضاد لمتجه الوحدة العمودي على السطح  $\hat{n}$  ، وهي الحالة المعروفة بالمستقبل (Receiver). ويكون التكامل السطحي لمتجه بوينتغ موجياً ، إذا كانت الطاقة في تلك اللحظات تتدفق إلى الخارج ، وفي هذه الحالة يكون المتجه  $\vec{S}$  باتجاه متجه الوحدة  $\hat{n}$  ، وهي الحالة المعروفة باسم المرسل (Transmitter).

ويمكن ترتيب حدود المعادلة (8-25) ، على النحو التالي:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \right) dv = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv + \oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} da \quad (8-27)$$

وتمثل المعادلة (8-27) ما يعرف بنظرية بوينتغ (Poynting Theorem). ويمكن تفسير حدودها على النحو التالي:

[ملاحظة: الطرف الأيسر للمعادلة (8-27) يساوي صفراً للمجالات

الاستاتيكية].

يمثل الطرف الأيسر للمعادلة (8-27) المعدل الزمني لنقصان الطاقة الكهربائية والمغناطيسية وهذا النقصان يُعبر عنه بحددين: الحد الأول وهو  $\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv$  ، ويمثل الطاقة المبددة كحرارة لكل وحدة زمن ، والحد الثاني وهو  $\oint_S \hat{S} \cdot \hat{n} dv$  ، ويمثل المعدل الزمني لتدفق الطاقة الآني عبر السطح  $S$ . أي أن هذه المعادلة تُجسّد قانون حفظ الطاقة في حجم ثابت  $V$ .

وبإيجاد التكامل السطحي لمتجه بوينتغ [المعادلة (8-26)] لسطح مغلق ، فإننا نحصل على القدرة الآنية أو ما يعرف بالمعدل الزمني لتدفق الطاقة الآني من ذلك السطح المغلق. أي أن:

$$P(t) = \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} da = \oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} da \quad (8-28)$$

وقبل الانتهاء من موضوع متجه بوينتنگ ونظرية بوينتنگ نود الإشارة

إلى أنه يمكن كتابة المعادلة (8-27)، على النحو التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \quad (8-29)$$

حيث  $u$ : تمثل مجموع كثافتي الطاقة الكهربائية والمغناطيسية الحجميتين. وفي حالة المجالات الاستاتيكية، فإن المعادلة السابقة تؤول إلى:

$$\vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \quad (8-30)$$

-

إن من أهم تطبيقات معادلات ماكسويل هو استخدامها في اشتقاق معادلات الموجات الكهرومغناطيسية في الأوساط الخطية. وسنبين فيما يأتي كيفية اشتقاق الموجة بدلالة المتجهين  $\vec{E}$  و  $\vec{H}$ .

$\vec{H}$

- -

بأخذ اللف ( $\vec{\nabla} \times$ ) لطرفي معادلة ماكسويل الثالثة

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

فإننا نحصل على:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \times \vec{J} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (8-31)$$

وفي حالة الأوساط الخطية، فإن العلاقات التركيبية بين  $\vec{D}$  و  $\vec{E}$  و  $\vec{J}$  و  $\vec{H}$ ، هي:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} ; \vec{J} = \sigma \vec{E} , \vec{B} = \mu \vec{H}$$

وفي حالة كون  $\mu$  ,  $\sigma$  ,  $\epsilon$  مقادير ثابتة ولا تعتمد على الزمن، فإن العلاقة (8-31) تصبح على:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) &= \sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} + \epsilon \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})\end{aligned}\quad (8-32)$$

ومن معادلة ماكسويل الأولى، فإن المقدار  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ ، يساوي:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

وبالتعويض عن  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  من المعادلة السابقة في المعادلة (8-32)، نحصل على:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} &= -\sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \\ &= -\sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (8-33)$$

وباستخدام المتطابقة 1  $-\nabla^2 \vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F}$ ، فإن الطرف الأيسر للمعادلة (8-33)، يساوي

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H}$$

ومن العلاقة السابقة والمعادلة (8-33)، نحصل على:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}\quad (8-34)$$

وبما أن  $\mu$  ثابتة، فإن  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$  تساوي:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة (8-34) تؤول إلى:

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (8-35)$$

ويمكن أن تأخذ المعادلة (8-35) الشكل التالي:

$$(8-36) \quad \nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

وتمثل العلاقتين السابقتين معادلة الموجة غير المتجانسة للمجالين  $\vec{H}$  و  $\vec{B}$  على الترتيب، لوسط متجانس وخطي وسوي الخواص في جميع الاتجاهات بالنسبة للثوابت  $\varepsilon$  و  $\mu$  و  $\sigma$ .

$\vec{E}$

يمكن اشتقاق معادلة الموجة بدلالة المتجه  $\vec{E}$  على النحو التالي:

$$\text{بأخذ اللف } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ لطريفة معادلة ماكسويل الأولى}$$

فإننا نحصل على:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H})$$

ولكن  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  من معادلة ماكسويل الثالثة، يساوي:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (8-37)$$

$$\begin{aligned} \therefore \nabla \times \nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \\ &= -\sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (8-38)$$

وعلى غرار المتطابقة  $\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ ، فإن

الطرف الأيسر للمعادلة (8-37) يساوي:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

ومن العلاقة السابقة والمعادلة (8-37)، نستنتج أن:

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (8-39)$$

وإذا كان الوسط الذي نتعامل معه خالياً من الشحنات الحرة فهذا يعني أن:

$$[\rho = 0]$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\rho}{\varepsilon} = 0 \quad (8-40)$$

وبالتالي فإن المعادلة (8-38) ستؤول إلى ما يلي:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (8-41)$$

والمعادلة (8-39) كذلك هي معادلة موجة غير متجانسة للمجال  $\vec{E}$ ، لوسط متجانس وخطي وسوي الخواص في جميع الاتجاهات، وهي تشبه تماماً المعادلة (8-35) أو (8-36). ويحل هذه المعادلات فإنه بالإمكان تعيين المجال الكهرومغناطيسي في وسط بالمواصفات المذكورة آنفاً لخطي، متجانس، سوي الخواص في جميع الاتجاهات، خال من الشحنات الحرة  $[\rho = 0]$  بغض النظر عن الوسط فيما إذا كان موصلاً تماماً، أو عازلاً تماماً، أو متوسط العزل أو التوصيل. ويُطلق على الحد  $\sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  في المعادلة (8-35) أو الحد  $\sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  في المعادلة (8-39) بحد الفقد (loss term) لأن هذا الحد هو سبب فقدان أو ضياع أو توهين (attenuation) الموجة  $\vec{H}$  و  $\vec{E}$  في الوسط المادي. فإذا كانت  $\sigma \neq 0$ ، فإن ذلك

الحد لا يساوي صفراً، وبالتالي ستفقد الموجة طاقتها في الوسط بتوليد الحرارة.

ولإيجاد معادلتى الموجتين  $\vec{E}$  و  $\vec{B}$  ، فإنه يكفي في حالة الموجات أحادية الطول الموجي (monochromatic) ، إيجاد حل لمعادلة المجال الكهربائي  $\vec{E}$  ، وبإيجاد  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  فإننا نحصل على  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  ، حسب معادلة ماكسويل الأولى، ومنها يُمكن إيجاد  $\vec{B}$  بسهولة.

وبنظرة عامة لمعادلات الموجة [8-35) و(8-36) و(8-39)]، نجد أنها تربط بين تغيرات الموجة في الفضاء (space) مع الزمن (time) للكمية المتجهة. أي أنها تمثل حركة الموجة. فهي تمتص جزءاً قليلاً جداً من الطاقة الكهرومغناطيسية، بينما يزداد هذا الامتصاص في الأوساط الموصلة (conducting media) كالمعادن والمياه المالحة، والغازات المتأينة.

أولاً: في حالة الفراغ التام.

يكون لدينا:

$$\sigma = 0 \quad , \quad \epsilon = \epsilon_0 \quad , \quad \mu = \mu_0$$

وسنفرض أن المجال الكهربائي  $\vec{E}(\vec{r})$  يتغير باتجاه واحد (على امتداد المحور z مثلاً). أي أن:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(z)$$

وحسب الافتراضات السابقة، فإن المعادلة (8-42)، ستؤول إلى ما يلي:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(z) + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \vec{E}(z) = 0 \quad (8-42)$$

ومنها، فإن:

$$\frac{d^2 \vec{E}(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{E}(z) = 0 \quad (8-43)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{حيث:}$$

وتعرف المعادلة (8-43) بهذه الهيئة، بمعادلة هلمولتز المتجهة وهي رياضياً نفس معادلة المذبذب التوافقي (Harmonic Oscillator Equation)، وحلها يعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_0 e^{\pm ikz} \quad (8-44)$$

حيث:  $\vec{E}_0$  متجه ثابت ويمثل اتساع (Amplitude) موجة المجال الكهربائي.

$k$  ثابت ويعرف بثابت الانتشار (Propagation Constant)، وتعطى قيمته بالعلاقة:

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (8-45)$$

بعد أن أوجدنا اعتماد المجال الكهربائي  $\vec{E}(\vec{r})$  لوالتي تعبر عنها بالمجال  $\vec{E}(z)$  على الموضع، فإن بالإمكان إيجاد حل كامل للمعادلة (8-39) وذلك بالتعويض عن  $\vec{E}(z)$  من المعادلة (8-44) في المعادلة (8-40)، فنحصل على مجال كهربائي  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  يعتمد على الموضع وعلى الزمن على النحو التالي:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{\pm ikz} e^{-i\omega t} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t \pm kz)}$$

$$\therefore \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t \pm kz)} \quad (8-46)$$

وتحتوي معادلة الموجة (8-46) على جزء حقيقي (real part) وجزء تخيلي (Imaginary part). وبأخذ الجزء الحقيقي فقط للمعادلة (8-46)، نحصل على:



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t + k z) \quad (8-47)$$

وتكتب المعادلة (8-47) بشكل آخر، مكافئ لها، على النحو التالي:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos \omega \left( t + \frac{z}{c} \right) \quad (8-48)$$

وتمثل العلاقة السابقة موجة جيبية (sinusoidal wave)، تتحرك إلى اليمين (في حالة الإشارة السالبة) أو إلى اليسار (في حالة الإشارة الموجبة)، وهذا تفسير منطقي لأن مصدر الأمواج يبعث الأمواج في كافة الاتجاهات دائماً. ولو أننا افترضنا انتشار الموجة في بعد واحد، فقد حصلنا على انتشار لهذه الموجة في بعد واحد ولكن باتجاهين متضادين، وتشير المعادلة أيضاً إلى أن الأمواج تنتشر بسرعة  $c$ ، وقد تنبأ ماكسويل بقيمة سرعة انتشار هذه الأمواج في الفراغ بأنها تساوي:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.854 \times 10^{-12} \times 4 \pi \times 10^{-7}}} = 2.997 \times 10^8 \text{ m/s}$$

وهي سرعة الضوء في الفراغ (Vacuum).

وتبين العلاقة (8-47) أن تردد الموجة  $f$ ، يساوي

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (8-49)$$

والطول الموجي  $\lambda$  (wave length)، يساوي:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (8-50)$$

ومن العلاقتين السابقتين والمعادلة (8-45)، نجد أن العلاقة التي تربط بين

الطول الموجي  $\lambda$  والتردد  $f$  وسرعة الضوء  $c$ ، هي:

$$\lambda f = c$$

## ثانياً: في وسط عازل وغير مغناطيسي.

سندرس الآن حالة وسط عازل (غير موصل). وفي هذه الحالة فإن  $\sigma = 0$  أيضاً. ويتصف الوسط بأنه غير قابل للمغنطة، وفي هذه الحالة أيضاً فإن  $\mu = \mu_0$ . ولا تختلف هذه الحالة عن الحالة السابقة (الفراغ التام) إلا بثابت العزل K. أي أن سماحية المادة العازلة (Permittivity) ستكون على النحو التالي:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 K$$

حيث K: ثابت العزل (dielectric constant)،  $K = 1$  للفراغ وفي هذه الحالة سنحصل على نفس النتائج السابقة. والاختلاف الوحيد سيكون في المعادلة (8-45)، حيث سيصبح شكلها على النحو التالي:

$$k = \sqrt{K} \frac{\omega}{c} \quad (8-51)$$

وحيث إن سرعة الموجة  $v$  في وسط ما، تعطى بالعلاقة:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (8-52)$$

وبالتعويض عن  $\varepsilon$  و  $\mu$  للحالة قيد البحث في المعادلة (8-52)، نحصل على:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 K \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{c}{\sqrt{K}}$$

وبالتعويض عن  $n = \sqrt{K}$  في العلاقة السابقة، فإننا نجد أن سرعة انتشار الموجة (wave propagation velocity)  $v$  تعطى بالعلاقة:

$$v = \frac{c}{n}$$

وتمثل المعادلة (8-52) سرعة انتشار الموجة  $v$  في وسط غير موصل وغير مغناطيسي معامل انكساره  $n$  (refractive index). وفي حالة الفراغ التام فإن  $v = c$  لأن  $n = 1$ .

## ثالثاً: في وسط موصل.

سنناقش حل المعادلة (8-42) في حالة انتشار الموجة في وسط موصل ( $\sigma \neq 0$ ). وفي هذه الحالة يتوجب علينا الاحتفاظ بالحد الثالث في المعادلة (8-42)، ولكننا سنقوم بإيجاد حل لتلك المعادلة في حالتين مختلفتين. الأولى عندما تكون  $\sigma$  صغيرة نسبياً والأخرى عندما تكون  $\sigma$  كبيرة. أما الحالة الأولى عندما تكون  $\sigma$  صغيرة فإن تأثيرها على المعادلة (8-42)، ستكون على النحو التالي:

$$\varepsilon \mu \omega^2 \gg \sigma \mu \omega$$

وفي هذه الحالة يجب أن تكون

$$\varepsilon \omega \gg \sigma$$

وسنحصل في هذه الحالة على موجه مضمحلة (damped wave).

أما الحالة المضادة لما سبق، فهي عندما تكون:

$$\varepsilon \omega \ll \sigma$$

وفي هذه الحالة يمكننا، بالنظر للمعادلة (8-42)، إهمال الحد الثاني فيها وستؤول تلك المعادلة لمجال كهربائي يتغير في اتجاه واحد ( $z$  مثلاً)، إلى ما يلي:

$$\frac{d^2 \vec{E}(z)}{dz^2} + i \sigma \mu \omega \vec{E}(z) = 0 \quad (8-53)$$

ويمكننا جعل معامل المجال الكهربائي  $\vec{E}(z)$  في المعادلة السابقة حقيقياً، بدلاً من أن يكون تخيلياً، بافتراض ما يلي:

$$i \omega = \alpha = \text{مقدار حقيقي}$$

وهذا يعني أن التردد الزاوي  $\omega$  في المعادلة (8-53) أصبح خيالياً (imaginary)، فإذا كانت:

$$k = \sqrt{\alpha \sigma \mu} = \text{ثابت}$$

فإن المعادلة (8-53) ستؤول إلى ما يلي:

$$\frac{d^2 \vec{E}(z)}{dz^2} + k^2 \vec{E}(z) = 0$$

وحل المعادلة السابقة هو:

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_0 e^{\mp ikz}$$

أي أن اعتماد المجال الكهربائي مع البعد  $z$  (الحيز الفضائي) يشبه تماماً الحالات السابقة.

أما  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  فستختلف عن الحالات السابقة بالاعتماد على الزمن فقط وتعطى  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  بالعلاقة التالية:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} e^{-\alpha t} \quad (8-54)$$

وتشير المعادلة (8-54) إلى أن المجال الكهربائي يضمحل أسياً (exponentially) على بعد معين، مع مرور الزمن وذلك عندما تكون  $\sigma \ll \omega \epsilon$  بسبب فقدان الطاقة كحرارة من جراء توصيل المادة.

وأخيراً لا بد من الإشارة إلى أن الحد  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  في المعادلة (8-39) قد نشأ من تيار الإزاحة  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ، بينما الحد  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  قد نشأ من التيار الانتقالي  $\vec{J}$ . وهنا تكمن أهمية إضافة تيار الإزاحة لموضوع النظرية الكهرومغناطيسية. فلو لم يتم إضافة هذا التيار لمعادلة أمبير لتسبب عدم وجود الحد  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  إلى اضمحلال جميع المجالات أسياً مع الزمن بغض

النظر عن طبيعة الوسط وهذا يعزز أهمية إضافة ماكسويل لتيار الإزاحة لقانون أمبير.

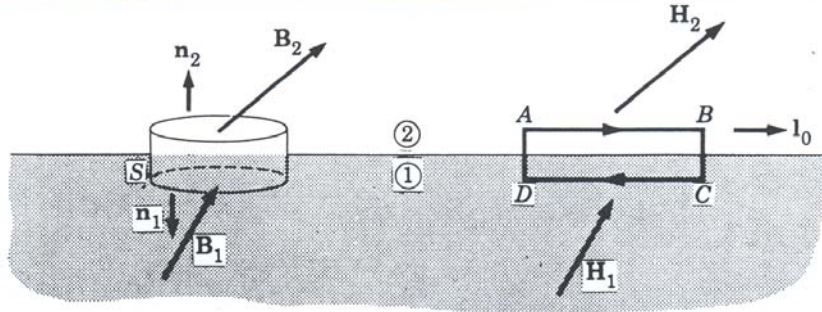
لقد درسنا الشروط الحدودية للمجالين الكهربائي والمغناطيسي الاستاتيكيين عبر سطح فاصل بين وسطين. أما الآن فسنعيد دراسة الشروط الحدودية لهذه المجالات عند تغيرها مع الزمن. وسنستخرج هذه الشروط من معادلات ماكسويل، تماماً كما في الحالة الاستاتيكية لضمان تحقيقها لتلك المعادلات.

$\vec{B}$

إن أول شرط حدّي عام ومباشر يمكن إيجاده للمجال المغناطيسي  $\vec{B}$ ، من معادلة ماكسويل التالية:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

لنفرض سطحاً على شكل أسطوانة مشتركة بين وسطين، كما في الشكل رقم (٧-٨)، طوله  $h$ .



الشكل رقم (٧-٨)

وبتطبيق نظرية التفريق على المعادلة السابقة، نجد أن:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} \, dV = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, da$$

وبإيجاد مفكوك الطرف الأيمن للمعادلة السابقة، نجد أن:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, da = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 \, da + \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 \, da + \int_{S_3} \vec{B}_3 \cdot \hat{n}_3 \, da = 0$$

وعند السطح الفاصل، علينا اختيار طول الأسطوانة  $h$  بحيث يقترب من الصفر، وبالتالي ستقترب مساحة السطح المستدير  $S_3$  من الصفر أيضاً. وسينتج عن ذلك تلاشي الحد الأخير في المعادلة السابقة. وبما أن:

$$\hat{n}_1 = -\hat{n}_2 = \hat{n}$$

فإن:

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \hat{n} = 0$$

ومنها، فإن:

$$B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2$$

ويمكن التعبير عن المعادلة السابقة بأسلوب آخر على النحو التالي:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (8-55)$$

ونلاحظ من النتيجة السابقة، أن الشرط الحدي للمجال المغناطيسي للموجة الكهرومغناطيسية عند السطح الفاصل لا يختلف عن الشرط الحدي للمجال المغناطيسي في الحالات الاستاتيكية.

$\vec{E}$

--

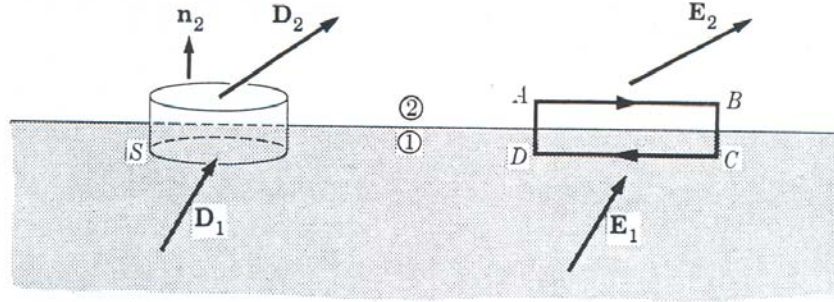
يمكننا إيجاد الشرط الحدي الثاني والذي يطبق على المجال

الكهربائي  $\vec{E}$  من معادلة ماكسويل التالية:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ويأخذ التكامل السطحي لطرفي المعادلة السابقة، لسطح محاط بمسار مغلق على شكل مستطيل، كما في الشكل رقم (٨-٨)، نجد أن:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} \, da = - \int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, da$$



الشكل رقم (٨-٨)

وبتطبيق نظرية ستوكس على الطرف الأيسر للمعادلة السابقة، فإن التكامل السطحي يتحول إلى تكامل خطي لمسار مغلق، على النحو التالي:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} \, da = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, da$$

وبإيجاد مفكوك التكامل الخطي في المعادلة السابقة، نستنتج أن:

$$E_{1t} L - E_{1n} h_1 - E_{2n} h_2 - E_{2t} L + E_{2n} h_2 + E_{1n} h_1 = - \int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, da$$

فإذا تقلص الطول  $h$  لينطبق المسار المغلق على السطح الفاصل (لتقترب  $h_2$  و  $h_1$  من الصفر)، فإن الحدود المضروبة بالمسافة  $h_1$  و  $h_2$  في المعادلة السابقة ستتلاشى وسيتلاشى أيضاً الحد على الطرف

الأيمن للمعادلة بسبب تلاشي مساحة المسار المغلق، شريطة أن تكون

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \text{ محددة. وستؤول المعادلة السابقة بالتالي إلى ما يلي:}$$

$$E_{1t} L - E_{2t} L = 0$$

ومنها، فإن:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (8-56)$$

وتشير المعادلة (8-56) إلى أن المركبة المماسية للمجال الكهربائي  $\overline{E}$  يجب أن تكون متصلة عبر السطح الفاصل. ويلاحظ من هذه النتيجة أن الشرط الحدي للمجال الكهربائي للموجة الكهرومغناطيسية عند السطح الفاصل لا تختلف أيضاً عن الشرط الحدي للمجال الكهربائي الاستاتيكي. ولمعرفة الحالات الخاصة لوسطين مختلفين، انظر الجدول رقم (٨-٢).

$\overline{D}$

- -

يمكننا اشتقاق شرط حدي ثالث. وهذا الشرط خاص

بالمتجه  $\overline{D}$ . ويمكن إيجاده من معادلة ماكسويل التالية:

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{D} = \rho$$

فإذا تخيلنا سطحاً على شكل أسطوانة كما في الشكل رقم (٨-٨)، تماماً كما فعلنا في اشتقاق الشرط الحدي الخاص بالمتجه  $\overline{B}$ ، وأجرينا تكامل المعادلة السابقة حول حجم معين  $V$  يُمثل بسطح الأسطوانة المغلق  $S$ ، فإننا سنحصل على:

$$\int_V \overline{\nabla} \cdot \overline{D} \, d v = \int_V \rho \, d v$$



وبتطبيق نظرية التفريق لجاوس على الطرف الأيسر للمعادلة السابقة،  
فسنحصل على:

$$\oint_S \bar{D} \cdot \hat{n} \, d v = \int_V \rho \, d v$$

وبإيجاد مفكوك الطرف الأيسر واعتبار  $S_3 = 0$  ، عندما يتقلص طول  
الأسطوانة ليقترّب من السطح الفاصل، وبالتعويض فيها كذلك  
عن  $\rho \, d v = \delta \, d a$  . فإننا سنحصل على:

$$\int_{S_1} \bar{D}_1 \cdot \hat{n}_1 \, d a + \int_{S_2} \bar{D}_2 \cdot \hat{n}_2 \, d a = \int_{S_1} \delta \, d a$$

ومنها، فإن:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad (8-57)$$

حيث تمثل  $\sigma$  الكثافة السطحية للشحنات الحرة على السطح الفاصل بين  
الوسطين.

ويبين الجدول رقم (٨-٢) الحالات الخاصة للمعادلة (8-57) التي

سنستنتجها فيما يلي:

إذا كانت الشحنة السطحية  $\sigma$  على السطح الفاصل بين وسطين

تساوي صفراً، وهذه الحالة تمثل وسطاً فاصلاً بين عازلين، فإن:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (8-58)$$

أما إذا كانت  $\sigma \neq 0$  عند السطح الفاصل بين وسطين، كحالة وسط  
فاصل بين موصل وعازل مثلاً، فيجب اشتقاق الشرط الحدي  
للمتجه  $\bar{D}$  بحيث تكون الشحنة محفوظة عند السطح الفاصل، وذلك  
على النحو التالي:

تكون الشحنة محفوظة عند السطح الفاصل إذا تحققت معادلة

استمرارية الشحنة التالية:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

وبإجراء التكامل الحجمي لحجم  $V$  محاط بالسطح المغلق  $S$  لطرية المعادلة السابقة، نحصل على:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d v = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d v$$

وبتطبيق نظرية التفرق على الطرف الأيسر للمعادلة السابقة والتعويض عن  $\rho d v$  بالمقدار  $\sigma d a$  في تلك المعادلة، فإننا نجد أن:

$$\oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} d a = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_1} \delta d a$$

ومنها، فإن:

$$J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (8-59)$$

فإذا كان الإشعاع الكهرومغناطيسي أحادي طول الموجة (monochromatic)، فإن تغير كثافة الشحنة السطحية  $\delta$  مع الزمن  $t$ ، يكون كتغير المجال الكهربائي أو المغناطيسي مع الزمن. أي كتغير  $e^{-i\omega t}$ ، وبهذا فإن:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -i \omega \delta_0 e^{-i\omega t} = -i \omega \delta$$

وبالتعويض عن النتيجة السابقة في المعادلة (8-59)، نستنتج أن:

$$J_{1n} - J_{2n} = i \omega \delta$$

وحيث إن  $J = \sigma E$ ، فإن المعادلة أعلاه تصبح على النحو التالي:

$$\sigma_1 E_{1n} - \sigma_2 E_{2n} = i \omega \delta \quad (8-60)$$

وبالتعويض كذلك عن  $D = \epsilon E$  في المعادلة (8-57)، فإننا سنحصل على:

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \delta \quad (8-61)$$

فإذا كانت  $\delta = 0$  على السطح الفاصل، فإننا نستنتج من المعادلتين (8-60) و (8-61)، أن:

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \quad (8-62)$$

وتتطبق المعادلة (8-62) على أي سطح فاصل بين وسطين، بغض النظر عن موصليتهما (conductivity). أي تنطبق على سطح فاصل بين موصلين جيدين:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \cong 0$$

وتتطبق كذلك على سطح فاصل بين عازلين جيدين.

$$\sigma_1 \cong \sigma_2 \cong \infty$$

أما إذا كانت  $\delta \neq 0$  على السطح الفاصل بين وسطين، فإننا نستنتج إذا عوضنا عن  $\delta$  من المعادلة (8-61) في المعادلة (8-60)، ما يلي:

$$\sigma_1 E_{1n} - \sigma_2 E_{2n} = i \omega (\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n})$$

وبضرب طرفي المعادلة السابقة بالمقدار  $i$ ، والقسمة على  $\omega$ ، فإننا سنحصل على:

$$i \frac{\sigma_1}{\omega} E_{1n} - i \frac{\sigma_2}{\omega} E_{2n} = -\epsilon_1 E_{1n} + \epsilon_2 E_{2n}$$

ومنها، فإن:

$$\left( \epsilon_1 + i \frac{\sigma_1}{\omega} \right) E_{1n} - \left( \epsilon_2 + i \frac{\sigma_2}{\omega} \right) E_{2n} = 0 \quad (8-63)$$

وتُعد المعادلة (8-63) من المعادلات الهامة التي تُزودنا بشرط حدّي في الحالة التي تكون فيها  $\delta \neq 0$ . كما يمكن كتابة المعادلة السابقة بدلالة متجهات الإزاحة، على النحو التالي:

$$\left(1 + i \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1 \omega}\right) \varepsilon_1 E_{1n} - \left(1 + i \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2 \omega}\right) \varepsilon_2 E_{2n} = 0$$

ومنها، فإن:

$$\left(1 + i \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1 \omega}\right) D_{1n} = \left(1 + i \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2 \omega}\right) D_{2n} \quad (8-64)$$

ويمكننا استنتاج حالة خاصة وهامة من المعادلتين (8-63) و (8-64)، وهي عندما تكون  $\delta \neq 0$ ، ويكون أحد الوسطين عالي التوصيل بينما الآخر متوسط التوصيل وفي هذه الحالة فإن المركبة العمودية للمجال الكهربائي في المادة عالية التوصيل (ليكن الوسط 2) تتلاشى بسبب تساوي الجهد على الموصل. وبالتالي انعدام تدرج الجهد وتعدم كذلك المركبة العمودية لمتجه الإزاحة ( $D_{2n}$ ). وينتج لدينا من المعادلة (8-61) ما يلي:

$$E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} \quad (8-65)$$

وحيث إن  $D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n}$ ، فإننا نستنتج من المعادلة (8-65)، ما يلي:

$$D_{1n} = \sigma \quad [ \sigma_2 \cong \infty ] \quad (8-66)$$

$\vec{H}$

يمكننا الحصول على شرط حدي للمتجه  $\vec{H}$ ، من معادلة

ماكسويل التالية:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

فبأخذ التكامل السطحي لطرفي المعادلة السابقة لسطح معين  $S$  محاط

بمسار مغلق كالمبين في الشكل رقم (٨-٧) نجد أن:

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot \hat{n} \, da = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, da + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} \cdot \hat{n} \, da$$

وبتحويل التكامل السطحي على الطرف الأيسر للمعادلة السابقة بالتكامل الخطي، فإننا نحصل على:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, da + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} \cdot \hat{n} \, da$$

وفي حالة انكماش السطح  $S$  باتجاه الوسط الفاصل، فإن التكامل السطحي الأخير في المعادلات السابقة يتلاشى إذا كانت  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  محددة.

أما التكامل السطحي الآخر فيساوي  $\vec{J} \cdot \hat{n} \Delta L$ ، وبإيجاد مفكوك الطرف الأيسر للمعادلة نفسها، نجد أن:

$$\vec{H}_1 \cdot \hat{t} \cdot \Delta L - \vec{H}_2 \cdot \hat{t} \cdot \Delta L = \vec{J} \cdot \hat{n} \Delta L$$

حيث إن:

$\hat{t}$ : متجه وحدة يوازي السطح الفاصل (انظر الشكل رقم ٨-٧).

$\hat{n}$ : متجه وحدة عمودي على السطح.

$\vec{J}$ : التيار لكل وحدة طول على السطح  $S$ ، وهو داخل في الصفيحة وحسب قاعدة اليد اليمنى عندما تشير الأصابع باتجاه المسار المغلق، أي أن:

$$H_{1t} - H_{2t} = J_{\perp} \quad (8-67)$$

حيث تمثل  $J_{\perp}$  مركبة كثافة التيار السطحي  $\vec{J}$  العمودية على مركبات  $\vec{H}$  المعنية. أي أن هذه المركبة عمودية على مركبتي  $\vec{H}$  المماسيتين  $(H_{2t}, H_{1t})$ .

وفكرة التيار السطحي المذكور أعلاه (التيار لكل وحدة طول من الطبقة السطحية) فهي شبيهة بكثافة الشحنات السطحية  $\delta$ ،

وبالتالي يمكننا استنتاج حالات خاصة حسب الأوساط. ففي حالة وجود وسط فاصل بين عازلين تامين ( $\sigma_1 = \sigma_2 \cong 0$ )، أو بين مادتين موصلية كل منهما محددة ( $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$ )، فإن  $\vec{J}_\perp$  تساوي صفراً. وفي مثل هذه الحالات، فإن المعادلة (8-67) تؤول إلى:

$$[\sigma_1 = \sigma_2 = 0 \text{ أو } \sigma_1, \sigma_2 \text{ محددة}]$$

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (8-68)$$

وتعني المعادلة (8-68) أن مركبة الشدة المغناطيسية المماسية للوسط الفاصل تكون متصلة في الحالات التي لا تكون فيها موصلية أحد الوسطين لانهائية، أي في الحالات التي لا يكون فيها أحد الوسطين موصلاً تماماً ( $\sigma$  لانهائية).

أما إذا وجد السطح الفاصل بين عازل تام (ليكن الوسط  $1; \sigma_1 = 0$ ) وموصل تام (ليكن الوسط  $2; \sigma_2 \cong \infty$ )، فيمكن إيجاد الشرط الحدي الخاص بهذه الحالة بتطبيق معادلة ماكسويل الثالثة على الوسط 2، على النحو التالي:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_2 = \vec{J}_2 + \frac{\partial \vec{D}_2}{\partial t} \quad (8-69)$$

وعلى افتراض أن  $\vec{E}_2$  و  $\vec{H}_2$  تتغيران مع الزمن على النحو  $e^{-i\omega t}$ ، وبالتالي ستغير  $\vec{D}_2$  و  $\vec{J}_2$  كذلك على غرارها. أي أن:

$$\vec{E}_2(t) = \vec{E}_2 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{D}_2(t) = \vec{D}_2 e^{-i\omega t} = \epsilon_2 \vec{E}_2 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{H}_2(t) = \vec{H}_2 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{J}_2(t) = \sigma_2 \vec{E}_2(t) = \sigma_2 \vec{E}_2 e^{-i\omega t}$$

وبالتعويض عن  $\vec{H}_2(t)$  ،  $\vec{J}_2(t)$  و  $\vec{D}_2(t)$  من العلاقات السابقة في المعادلة (8-69)، نحصل على:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_2 e^{-i\omega t} = \sigma_2 \vec{E}_2 e^{-i\omega t} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_2 \vec{E}_2 e^{-i\omega t})$$

ومنها فإن:

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{H}_2}{\sigma_2 - i\omega \epsilon_2} \quad (8-70)$$

ونلاحظ من العلاقة (8-70) أنه إذا كانت  $\sigma_2 = \infty$  ، كما هو الحال في الموصلات، وكانت  $\vec{H}_2$  محددة وقابلة للتفاضل في نفس الوقت، فإن تلك المعادلة تضمن أن يكون المجال  $\vec{E}_2$  يساوي صفرًا لضخامة قيمة  $\sigma_2$  في المقام.

وعلى صعيد آخر، فإن العلاقة التي تربط بين  $\vec{E}$  و  $\vec{B}$  في الوسط 2، وهي العلاقة التالية:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial t} \quad (8-71)$$

وعلى افتراض أن  $\vec{E}$  و  $\vec{B}$  متغيران في ذلك الوسط (2) مع الزمن على النحو  $e^{-i\omega t}$ ، فإن:

$$\begin{aligned} \vec{B}_2(t) &= \vec{B}_2 e^{-i\omega t} = \mu_2 \vec{H}_2 e^{-i\omega t} \\ \vec{E}_2(t) &= \vec{E}_2 e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

وبالتعويض عن  $\vec{E}_2(t)$ ،  $\vec{B}_2(t)$  من العلاقتين السابقتين في المعادلة (8-71)، فإننا نحصل على:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_2 e^{-i\omega t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_2 \vec{H}_2 e^{-i\omega t}) = i\omega \mu_2 e^{-i\omega t} \vec{H}_2$$

ومنها فإن:

$$\vec{H}_2 = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{E}_2}{i \omega \mu_2} \quad (8-72)$$

ونلاحظ من العلاقة السابقة أن تلاشي  $\vec{E}_2$  يضمن تلاشي  $\vec{H}_2$ . فإذا تلاشت  $\vec{E}_2$  في حالة كون الوسط 2 موصلاً ( $\sigma_2 \cong \infty$ )، فإن:

$$\left. \begin{aligned} E_{2n} = E_{2t} = 0 \\ \therefore H_{2t} = 0 \quad (\text{حسب المعادلة (8-72)}) \\ \therefore H_{1t} = j_{\perp} \quad (\text{حسب المعادلة (8-67)}) \\ \therefore B_{2n} = 0 \quad (\text{لأن } \vec{H}_2 = 0) \\ \therefore B_{1n} = 0 \quad (\text{حسب المعادلة (8-55)}) \\ D_{2n} = \epsilon_2 E_{2n} = 0 \\ D_{1n} - D_{2n} = \delta \Rightarrow \therefore \delta_{1n} = \delta \end{aligned} \right\} \quad (8-73)$$

وهكذا بعد أن أوجدنا جميع الشروط الحدودية اللازمة لحل المسائل الكهرومغناطيسية التي سندرسها في هذا المقرر، فإنه من الأفضل تلخيص جميع تلك الشروط الحدودية للأوساط المختلفة في جدول واحد كما هو مبين في الجدول رقم (٨-٢)، ليسهل عملية الرجوع إليها. لاحظ أننا فرضنا  $\sigma$  للموصل الجيد تساوي ما لانهاية ( $\infty$ )، وللعازل الجيد تساوي صفراً. أما للأوساط التي لا تُعد موصلة تماماً أو عازلة تماماً، فقد تأخذ  $\sigma$  أية قيمة اختيارية بين الصفر واللانهاية.

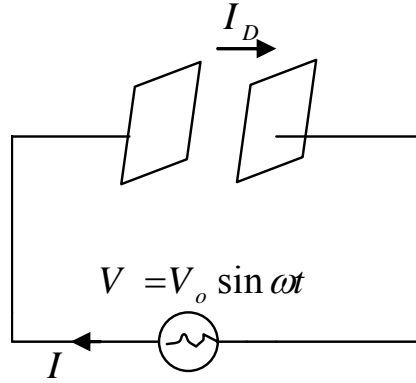


جدول رقم (٢-٨): ملخص الشروط الحدودية

الوسط الفاصل	$E_t$	$D_n$	$H_t$	$B_n$
عازل تام وعازل تام $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$	$E_{1t} = E_{2t}$	$D_{1n} = D_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$
موصل تام (2) وعازل تام (1) $\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = \infty$	$E_{2t} = 0$ $E_{1t} = 0$	$D_{2n} = 0$ $D_{1n} = \sigma$	$H_{2t} = 0$ $H_{1t} = j_{\perp}$	$B_{2n} = 0$ $B_{1n} = 0$
موصل اعتيادي (1) وموصل اعتيادي (2) $\sigma_1 \neq 0; \sigma_1 \neq \infty$ $\sigma_2 \neq 0; \sigma_2 \neq \infty$	$E_{1t} = E_{2t}$	$\left(1 + i \frac{\sigma_1}{\epsilon_1 \omega}\right) D_{1n} +$ $\left(1 + i \frac{\sigma_2}{\epsilon_2 \omega}\right)$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$

( - )

يبين الشكل رقم (٨-٩) دائرة مؤلفة من مكثف موسعته  $C$  ومصدر جهد متردد فرق الجهد بين طرفيه، يعطى بالعلاقة  $V = V_0 \sin \omega t$ . أثبت أن التيار الانتقالي  $I_C$  المار في أسلاك التوصيل يساوي تيار الإزاحة  $I_D$  المار في المكثف، علماً بأنه مكثف ذو صفيحتين متوازيتين مساحة كل منهما  $A$  والمسافة بينهما  $d$ .



الشكل رقم (٨-١٢)

الحل:

إن العلاقة بين التيار الانتقالي (تيار الشحن charging current)

و فرق الجهد بين طرفي المكثف هي:

$$I_C = C \frac{dV}{dt} = C \frac{d}{dt} (V_0 \sin \omega t)$$

$$= \omega C V_0 \cos \omega t \quad (1)$$

أما تيار الإزاحة ( $I_D$ ) في المكثف فيعطى بالعلاقة:

$$I_D = \int \vec{J}_D \cdot \hat{n} da = J_D A$$

حيث  $A$ : مساحة صفيحة المكثف.

ولكن:

$$|\vec{J}_D| = \frac{\partial |\vec{D}|}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

وكذلك:

$$|\vec{E}| = \frac{V}{d}$$

$$\therefore I_D = J_D A = \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \frac{A}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \omega V_0 \cos \omega t$$

وحيث إن:  $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$  ،

$$\therefore I_D = \omega C V_0 \cos \omega t \quad (2)$$

ونلاحظ من المعادلتين (1) و (2) أن التيارين  $I_D$  و  $I_C$  متساويين. وبالتالي

فإن التيار  $I_D$  يكمل الدارة الكهربائية التي يمر بها  $I_C$  ، فهناك تيار

متصل في جميع أجزاء الدارة.

( - )

إذا علمت أن الموصلية (conductivity) للنحاس تساوي  $(\Omega \text{ m})^{-1} 5.8 \times 10^7$  ، وأن  $\varepsilon \cong \varepsilon_0$  و  $\mu = \mu_0$  فأوجد النسبة بين كثافة التيار الانتقالي  $J_C$  ، وكثافة تيار الإزاحة  $J_D$  عند تردد (1MHz). وأوجد النسبة بين  $J_D$  و  $J_C$  للتيفلون (Teflon). إذا علمت أن الموصلية له  $(\Omega \text{ m})^{-1} 3 \times 10^{-8}$  و  $\varepsilon \cong 2.1 \varepsilon_0$  و  $\mu \cong \mu_0$  .

**الحل:**

لنفرض أن الجهد بين طرفي الموصل (النحاس) أو العازل (التيفلون) يتغير جيبياً (sinusoidal) ، وبالتالي فإن المجال الكهربائي كذلك سيتغير جيبياً ، وليكن على النحو التالي:

$$E = E_0 \sin \omega t$$

حيث  $\omega$  : التردد الزاوي ويساوي  $f$  ( $2\pi f$ ) : تردد الجهد ويساوي  $10^6$  Hz )

$E_0$  : اتساع موجة المجال الكهربائي.

والعلاقة بين كثافة التيار الانتقالي ( $J_C$ ) والمجال الكهربائي  $E$  ، هي:

$$J_C = \sigma E = \sigma E_0 \sin \omega t \quad (1)$$

حيث  $\sigma$  : موصلية المادة.

وأما العلاقة بين كثافة تيار الإزاحة  $J_D$  ، والمجال الكهربائي  $E$  ، فهي:

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (E_0 \sin \omega t)$$

$$\therefore J_D = \omega \varepsilon E_0 \cos \omega t \quad (2)$$

وبما أن التيارين يتغيران مع الزمن جيبياً فإن القيمة القصوى لكثافتي التيارين: الانتقالي والإزاحة ، هي على الترتيب:

$$J_C = \sigma E_0$$

$$J_D = \omega \varepsilon E_0$$

وبالتالي فإن النسبة بينهما، تساوي:

$$\frac{|J_C|}{|J_D|} = \frac{\sigma E_0}{\omega \varepsilon E_0} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}$$

$$\text{(للنحاس)} = \frac{5.8 \times 10^7}{2\pi \times 10^6 \times 8.85 \times 10^{-12}} \cong 10^{12}$$

$$\therefore \frac{|J_C|}{|J_D|}$$

$$\text{(للتيفلون)} = \frac{3 \times 10^{-8}}{2\pi \times 10^6 \times 2.1 \times 8.85 \times 10^{-12}} \cong 2.57 \times 10^{-4}$$

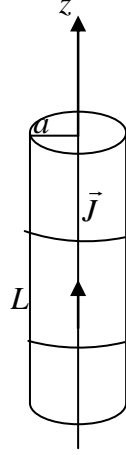
$$\frac{|J_C|}{|J_D|}$$

ونلاحظ من هذا المثال أن التيار الانتقالي في النحاس (وكذلك كافة المعادن) أكبر بكثير من تيار الإزاحة ( $J_C \gg J_D$ )، بينما تيار الإزاحة في التيفلون (وكذلك كافة العازلات الجيدة) أكبر بكثير من التيار الانتقالي ( $J_D \gg J_C$ ) وذلك عندما تكون الترددات عالية. أما إذا انخفضت الترددات فإن  $J_C \gg J_D$  بالنسبة للمعادن، وقد تصبح  $J_C > J_D$  بالنسبة للعازلات عند ترددات منخفضة جداً. لهذا يجب تحديد التردد عند حساب النسبة بين  $J_C$  و  $J_D$ .

( - )

سلك معدني موصليته  $\sigma$  ونصف قطره  $a$ ، يحمل تياراً  $I$ ، كما في الشكل رقم (٨-١٠). أوجد محصلة القدرة التي تعبر جزءاً من السلك

طوله  $L$  ، وبين أن هذه القدرة ما هي إلا القدرة المبذولة في مقاومة السلك المعدني. ووضح كذلك أن تكامل  $\vec{J} \cdot \vec{E}$  الحجمي يُعبر عن النتيجة السابقة.



شكل رقم (٨-١٠)

الحل:

لنفرض أن محور السلك ينطبق على المحور  $z$  كما في الشكل

رقم (٨-١٠).

وبالتالي، فإن:

$$\vec{J} = J_z \hat{z} = \sigma E_z \hat{z} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z}$$

ومنها فإن المجال الكهربائي باتجاه المحور  $z$  ، يساوي:

$$\vec{E} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \hat{z} \quad (1)$$

أما الشدة المغناطيسية  $\vec{H}$  ، فيمكن إيجادها من قانون أمبير، على

النحو التالي:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H_\theta 2\pi a = I$$

ومنها، فإن  $\vec{H}$  عند سطح السلك، تساوي:

$$\vec{H}_\theta = \frac{I}{2\pi a} \hat{\theta} \quad (2)$$

يمكننا الآن بعد أن أوجدنا  $\vec{E}$  و  $\vec{H}$  أن نجد متجهه

بوينتغ  $\vec{S}$ ، على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} \\ &= \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \hat{z} \times \frac{I}{2\pi a} \hat{\theta} = \frac{I^2}{2\pi^2 a^3} (\hat{z} \times \hat{\theta}) \\ \therefore \vec{S} &= -\frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} \hat{r} \end{aligned} \quad (3)$$

وتشير المعادلة السابقة إلى أن متجه بوينتغ والذي هو عبارة عن كثافة القدرة (power density) يتجه من السطح المستدير للسلك إلى محوره، كما هو موضح على المقطع العرضي للسلك في الشكل المجاور.

أما محصلة القدرة التي تعتبر جزءاً من السلك طوله  $L$ ، فيمكن إيجادها على النحو التالي:

$$P = -\oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} da = -\int_{S_1} \vec{S} \cdot \hat{n} da - \int_{S_2} \vec{S} \cdot \hat{n} da - \int_{S_3} \vec{S} \cdot \hat{n} da$$

حيث  $S_1$  و  $S_2$  و  $S_3$ : مساحة السطح العلوي والسفلي والمستدير للسلك، على الترتيب.

ولكن:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{S} \cdot \hat{n} da &= \int_{S_2} \vec{S} \cdot \hat{n} da = 0 \\ \therefore P &= -\int_{S_3} \vec{S} \cdot \hat{n} da = |\vec{S}| A \end{aligned}$$

حيث  $A$ : مساحة السطح المستدير للسلك ذي الطول  $L$ ،  
وتساوي  $2 \pi a L$ .  
أي أن:

$$P = \frac{I^2}{2 \pi^2 a^3 \sigma} \times 2 \pi a L = \frac{I^2 L}{\pi a^2 \sigma} \text{ (Watt)} \quad (4)$$

ولكن العلاقة بين المقاومة ( $R$ ) والموصلية ( $\sigma$ ) أو  
المقاومية ( $\rho$ )، ومساحة مقطع السلك  $A$  وطوله  $L$  هي:

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{L}{\sigma A} = \frac{L}{\pi a^2 \sigma} \quad (5)$$

وبالتعويض عن الكمية  $\frac{L}{\pi a^2 \sigma}$  بالمقاومة ( $R$ ) في المعادلة (4)، نجد  
أن:

$$P = \frac{I^2 L}{\pi a^2 \sigma} = I^2 R \quad (6)$$

أي أن محصلة القدرة التي تعبر السلك في أي لحظة، تساوي القدرة المبذولة  
من قبل مقاومة السلك، وهذا شرط أساسي لتحقيق قانون حفظ الطاقة في  
حجم معين. وكذلك يمكن الحصول على النتيجة في المعادلة (6) على  
النحو التالي:

$$P = \int \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv = J E \times \text{الحجم}$$

$$\therefore P = \sigma E^2 \times (L \pi a^2)$$

وبالتعويض عن  $E$  من المعادلة (1) وعن ( $R$ ) من المعادلة (5)، نجد أن:

$$P = \sigma \left( \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \right)^2 \pi a^2 L = I^2 \left( \frac{L}{\pi a^2 \sigma} \right) = I^2 R \quad (7)$$

( - )

وُضع هوائي (antenna) في مركز نظام محاور كروية في فضاء تام (Free Space)، كما في الشكل رقم (٨-١١). إذا علمت أن المجالين  $\vec{E}$  و  $\vec{H}$  الناتجين عن الهوائي على بعد  $r$ ، يعطيان بالعلاقتين التاليتين:

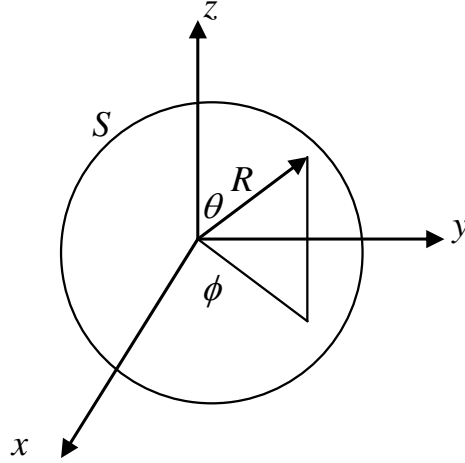
$$\vec{E} = \frac{E_0}{r} \sin \theta \sin \omega \left( t - \frac{r}{u_0} \right) \hat{\theta}$$

$$\vec{H} = \frac{E_0}{r \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}} \sin \theta \sin \omega \left( t - \frac{r}{u_0} \right) \hat{\phi}$$

[  $\omega$  و  $E_0$  و  $u_0$  ثابت ]

فأوجد:

- (a) - متجه بوينتغ  $\vec{S}$  على بعد  $r$  من الهوائي.  
 (b) - متوسط القدرة الكلية المنبعثة من الهوائي على بعد  $R$ .



الشكل رقم (٨-١١)



الحل:

(a) يعطى متجه بوينتغ بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} \\ \therefore \vec{S} &= \frac{E_0}{r} \sin\theta \sin\omega\left(t - \frac{r}{u_0}\right) \hat{\theta} \times \frac{E_0}{r\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \sin\theta \sin\omega\left(t - \frac{r}{u_0}\right) \hat{\phi} \\ \vec{S} &= \frac{E_0^2}{r^2 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \sin^2\theta \sin^2\omega\left(t - \frac{r}{u_0}\right) \hat{r}\end{aligned}\quad (1)$$

(b) القدرة المنبعثة من الهوائي عبارة عن تكامل  $\vec{S} \cdot \hat{n} da$  لسطح اختياري مغلق، وليكن هذا السطح كروياً ونصف قطره  $R$ .

$$\begin{aligned}\therefore P &= \oint \vec{S} \cdot \hat{n} da \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{E_0^2}{R^2 \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \sin^2\theta \sin^2\omega\left(t - \frac{R}{u_0}\right) R^2 \sin\theta d\phi d\theta (\hat{r} \cdot \hat{n}) \\ &= \frac{E_0^2}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \sin^2\omega\left(t - \frac{R}{u_0}\right) \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3\theta d\phi d\theta \\ \therefore P &= \frac{E_0^2}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \sin^2\omega\left(t - \frac{R}{u_0}\right) \left[ \frac{4}{3} \cdot 2\pi \right] \\ &= \frac{8\pi}{3} \frac{E_0^2}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \sin^2\omega\left(t - \frac{r}{u_0}\right)\end{aligned}$$

أما متوسط القدرة ( $\bar{P}$ ) المنبعثة من الهوائي فيمكن إيجادها من تكامل المقدار السابق بالنسبة للزمن لدورة واحدة من الموجة. أي أن:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{8\pi E_0^2}{3\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \sin^2\omega\left(t - \frac{R}{u_0}\right) dt$$

ولكن:

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\therefore \bar{P} = \frac{8\pi E_0^2}{3T\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \int_0^T \sin^2 \omega \left( t - \frac{R}{u_0} \right) dt$$

$$= \frac{8\pi E_0^2}{3T\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \left[ \frac{1}{2} \int_0^T dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos 2\omega \left( t - \frac{R}{u_0} \right) dt \right]$$

$$= \frac{8\pi E_0^2}{3T\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \left[ \frac{T}{2} \right] = \frac{4\pi E_0^2}{3\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \text{ (Watt)}$$

لاحظ أن  $(\bar{P})$  لا تعتمد على مساحة السطح الكروي الذي تم اختياره.

( - )

وسط فاصل بين مادتين 1 و 2، ثابت نفاذيتهما  $\mu_1$  و  $\mu_2$  على الترتيب. فإذا علمت أن المجال المغناطيسي في الوسط الأول، يعطى بالعلاقة:

$$\bar{B}_1 = 0.6 \hat{x} + 1.1 \hat{y} \text{ (Wb/m}^2\text{)} \quad (1)$$

فأوجد المجال المغناطيسي في الوسط (2)، علماً بأن الوسط الفاصل يقع في المستوى x z.

الحل:

يمكننا إيجاد  $\bar{H}_1$  بالتعويض عن  $\bar{B}_1$  من المعادلة أعلاه في

العلاقة:

$$\bar{B}_1 = \mu_1 \bar{H}_1$$

أي أن:

$$\vec{H}_1 = \frac{0.6}{\mu_1} \hat{x} + \frac{1.1}{\mu_1} \hat{y} \quad (\text{A / m}) \quad (2)$$

ومن المعادلتين (1) و (2)، نجد أن:

$$B_{1n} = B_{1y} = 1.1 (\text{T}) \quad ; \quad B_{1t} = B_{1x} = 0.6 (\text{T})$$

$$H_{1n} = H_{1y} = \frac{1.1}{\mu_1} (\text{A / m}) \quad ; \quad H_{1t} = H_{1x} = \frac{0.6}{\mu_1} (\text{A / m})$$

والمجال  $\vec{B}$  في الوسط (2)، يعطى بالعلاقة:

$$\vec{B}_2 = B_{2x} \hat{x} + B_{2y} \hat{y}$$

ولكن:

$$B_{2x} = \mu_2 H_{2x} = \mu_2 H_{2t} = \mu_1 H_{1t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \times 0.6 (\text{T})$$

$$B_{2y} = \mu_2 H_{2y} = \mu_2 H_{2n} = B_{1n} = 1.1 (\text{T})$$

$$\therefore \vec{B}_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} 0.6 \hat{x} + 1.1 \hat{y} (\text{T})$$

( - )

فاصل بيني (interface) يقع بين وسطين في المستوى  $x$   $y$ . معاملات

الوسط الأول هي:  $\epsilon_1$  و  $\mu_1$  و  $\sigma_1$  ومعاملات الوسط الثاني هي:

$\epsilon_2$  و  $\mu_2$  و  $\sigma_2$ . فإذا علمت أن:

$$\vec{E}_1 = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \gamma \hat{z} \left( \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) \quad : \quad -1$$

وأن الوسطين عازلان تماماً (  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  )، فأوجد  $\vec{E}_2$ .

$$\vec{B}_1 = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \gamma \hat{z} (\text{T}) \quad : \quad -2$$

وأن موصلية الوسطين لا تساوي صفراً، بل قيمة محددة، فأوجد  $\vec{B}_2$ .

$$\vec{D}_1 = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \gamma \hat{z} \left( \frac{C}{m^2} \right) : -٣$$

وأن الوسطين عازلان تماماً، فأوجد  $\vec{D}_2$ .

$$\vec{H}_1 = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \gamma \hat{z} \left( \frac{A}{m} \right) : -٤$$

وأن موصلية الوسطين محدودة، فأوجد  $\vec{H}_2$ .

$$\vec{E}_1 = \alpha_e \hat{x} + \beta_e \hat{y} + \gamma_e \hat{z} \left( \frac{V}{m} \right) : -٥$$

$$\vec{B}_1 = \alpha_b \hat{x} + \beta_b \hat{y} + \gamma_b \hat{z} \left( \frac{V}{m} \right)$$

وأن الوسط 2 موصل تماماً ( $\sigma_2 = \infty$ )، والوسط (1) عبارة عن فراغ تام، فاحسب  $\alpha_e$ ،  $\beta_e$ ،  $\gamma_e$ ،  $\alpha_n$ ،  $\beta_n$  و  $\gamma_n$ ، إذا كانت كثافة الشحنات السطحية

على الموصل  $\delta \left( \frac{C}{m^2} \right)$ ، وكثافة التيار الطولي  $j \hat{y} \left( \frac{A}{m} \right)$ .

**الحل:**

-١ حالة عزل تام مع عازل تام:

$$\vec{E}_1 = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \gamma \hat{z} ; \vec{E}_2 = ?$$

$$\therefore E_{1t,x} = \alpha ; E_{1t,y} = \beta ; E_{1n} = \gamma$$

وحسب الشروط الحدودية، فإن:

$$E_{2t,x} = \alpha ; E_{2t,y} = \beta ; E_{2n} = \frac{D_{1n}}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_1 \gamma}{\epsilon_2}$$

$$\therefore \vec{E}_2 = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \gamma \hat{z}$$

-٢ حالة موصل اعتيادي مع موصل اعتيادي:

$$\vec{B}_1 = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \gamma \hat{z} ; \vec{B}_2 = ?$$

$$B_{1t,x} = \mu_1 H_{1t,x} = \alpha ; B_{1t,y} = \mu_1 H_{1t,y} = \beta ; B_{1n} = B_{2n} = \gamma$$

$$\therefore B_{2t,x} = \mu_2 H_{2t,x} = \mu_2 H_{1t,x} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \alpha$$

$$B_{2t,y} = \mu_2 H_{2t,y} = \mu_2 H_{1t,y} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \beta$$

$$\therefore \vec{B}_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \alpha \hat{x} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \beta \hat{y} + \gamma \hat{z} \text{ (T)}$$

-٣ حالة عازل تام مع عازل تام:

$$\vec{D}_1 = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \gamma \hat{z} ; \vec{D}_2 = ?$$

$$D_{1t,x} = \alpha = \epsilon_1 E_{1t,x} = \epsilon_1 E_{2t,x} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} D_{2t,x} \Rightarrow \therefore D_{2t,x} = \alpha \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

$$D_{1t,y} = \beta = \epsilon_1 E_{1t,y} = \epsilon_1 E_{2t,y} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} D_{2t,y} \Rightarrow \therefore D_{2t,y} = \beta \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

$$D_{1n} = \gamma = D_{2n}$$

$$\therefore \vec{D}_2 = \alpha \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \hat{x} + \beta \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \hat{y} + \gamma \hat{z}$$

-٤ حالة موصل اعتيادي مع موصل اعتيادي

$$\vec{H}_1 = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \gamma \hat{z}$$

$$H_{1t,x} = \alpha = H_{2t,x}$$

$$H_{1t,y} = \beta = H_{2t,y}$$

$$H_{1n} = \gamma = \frac{B_{1n}}{\mu_1} = \frac{B_{2n}}{\mu_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{2n} \Rightarrow \therefore H_{2n} = \gamma \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\therefore \vec{H}_2 = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \gamma \hat{z}$$

-٥ حالة موصل تام (2) مع عازل تام [الفراغ (1)]

$$\overline{E}_1 = \alpha_e \hat{x} + \beta_e \hat{y} + \gamma_e \hat{z}$$

$$\overline{B}_1 = \alpha_b \hat{x} + \beta_b \hat{y} + \gamma_b \hat{z}$$

بالاستعانة بالجدول (2) والشكل الذي يمثل المسألة، فإن:

$$\left. \begin{aligned} E_{2t,x} &= 0 && \text{(سطح متساوي الجهد)} \\ &&& \text{لأن الوسط (2) موصل} \\ E_{2t,y} &= 0 && \text{(سطح متساوي الجهد)} \end{aligned} \right\}$$

$$D_{2n} = \varepsilon_2 E_{2n} = 0 \Rightarrow E_{2n} = 0$$

$$\therefore E_{1t,x} = E_{2t,x} = 0 = \alpha_e \Rightarrow \therefore \alpha_e = 0$$

$$E_{1t,y} = E_{2t,y} = 0 = \beta_e \Rightarrow \therefore \beta_e = 0$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \delta$$

$$D_{2n} = 0$$

ولكن:

$$\therefore D_{1n} = \delta = \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_0 E_{1n} = \varepsilon_0 \gamma_e \Rightarrow \therefore \gamma_e = \frac{\delta}{\varepsilon_0}$$

بما أن:

$$E_{2t,x} = E_{2t,y} = 0$$

$$\therefore H_{2t,x} = H_{2t,y} = 0$$

أي أن:

كثافة التيار الطولي عليها  $H_{1t,x}$  ، كثافة التيار الطولي عليها  $H_{1t,y}$

$$\therefore H_{1t,x} = j_{\perp} = j = \frac{B_{1t,x}}{\mu_0} = \frac{\alpha_b}{\mu_0} \Rightarrow \therefore \alpha_b = \mu_0 j$$

$$H_{1t,y} = j_{\perp} = 0 = \frac{B_{1t,y}}{\mu_0} = \frac{\beta_b}{\mu_0} \Rightarrow \therefore \beta_b = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n} = 0 = \gamma_b \Rightarrow \therefore \gamma_b = 0$$

إذا أثر مجال جيبي تردده الزاوي  $\omega$  على مادة موصليتها  $\sigma$  وسماحياتها  $\epsilon$  ، أوجد التردد  $f$  الذي عنده يتساوى التيار الانتقالي ( $i_C$ ) مع تيار الإزاحة ( $i_D$ ). وإذا علمت أن  $\sigma = 10^{-2} (\Omega m)^{-1}$  و  $\epsilon = 3 \epsilon_0$  لمادة ما، فأوجد  $f$ .

في المثال (٨ - ١)، إذا علمت أن  $A = 10 \text{ cm}^2$  و  $d = 2 \text{ mm}$  والقيمة القصوى للجهد  $50 \text{ V}$ ، وتردد المصدر  $1 \text{ MHz}$ ، فأوجد القيمة القصوى لتيار الإزاحة ( $i_D$ ) .

يعطى المجال الكهربائي  $\vec{E}$  والشدة المغناطيسية  $\vec{H}$  بالإحداثيات الكروية بالعلاقتين التاليتين:

$$\vec{E} = \frac{10}{r} \sin \theta \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} r \right) \hat{\theta} \quad (1)$$

$$\vec{H} = \frac{10}{120\pi r} \sin \theta \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} r \right) \hat{\phi} \quad (2)$$

أوجد:

- (a) متجه بوينتنگ  $\vec{S}$  ، واتجاه تدفق القدرة.  
 (b) متوسط القدرة الكلية المنبعثة من سطح كروي نصف قطره  $100 \text{ m}$  ، وكذلك من سطح كروي نصف قطره  $10 \text{ km}$ .





## المراجع

:

الكوفحي، د. محمود ود. عبد السلام، ١٩٨٥. غيث الكهربائية  
والمغناطيسية، جامعة اليرموك، الأردن.

:

Fink, D.G., and H.W. Beaty, 1978. Standard Handbook for  
Electrical Engineering, McGraw Hill Book  
Company, New York.

Griffiths, D.J., 1996. Introduction to Electrodynamics.  
Printice Hall.

Hayat, W.H., 1980. Engineering Electromagnetics, McGraw  
Hill Book Company, New York.

Milford, F.J., and R.W. Christy, 1994. "Foundation of  
Electromagnetic Theory", Addison-Wesley Publishing  
Co.

Owen, G.E. , 1985. Electromagnetic Theory, Allyn and  
Bacon, Inc., Boston.

Panofsky, W.K., 1979. Classical Electricity and Magnetism,  
Addison- Wesley Publishing Co.

Plonus, M.A., 1987. Applied Electromagnetics, McGraw Hill Book Company, New York.

Pugh, E.M. and E.W. Pugh, 1988. "Principles of Electricity and Magnetism", Addison – Wesley Publishing Co.

Smythe, W.R., 1968. Static and Dynamic Electricity, McGraw Hill Book Company, New York.

## نبذة عن المؤلفين

- حصل على بكالوريوس فيزياء من جامعة الموصل بالجمهورية العراقية عام ١٩٨٧م. ثم حصل على الماجستير في الفيزياء عام ١٩٩٣م من جامعة الجبارا الإسلامية بالهند، وحصل على الدكتوراه في الفيزياء النظرية من جامعة راجستان بالهند عام ١٩٩٧م.
- عمل مساعد باحث في جامعة راجستان بالهند ودرس في قسم الفيزياء بها في الفترة من ١٩٩٤ - ١٩٩٦م. كما عم أستاذاً مساعداً في قسم الفيزياء بجامعة جرس بالملكة الأردنية الهاشمية في الفترة من ١٩٩٧ - ٢٠٠٢م. ويعمل كذلك أستاذاً مساعداً في قسم الفيزياء بكلية العلوم جامعة الملك فيصل بالملكة العربية السعودية من سنة ٢٠٠٢م وحتى الآن.
- عضو مشارك في مجموعة من المؤتمرات العلمية والجمعيات منها: مؤتمر العلوم الهندي، وعضو الجمعية السعودية للفيزياء، وعضو في IEEE.
- اهتماماته البحثية تتجه صوب أبحاث تخص تفاعل الأمواج والكهرومغناطيسية مع البلازما، ودراسة خصائص المواد عند ترددات عالية، والتطبيقات النظرية للكهرومغناطيسية.
- حصل على عدة مشاريع بحثية من جامعة الملك فيصل.
- نُشر له أكثر من ٢٠ بحثاً في موضوعات مختلفة في الفيزياء في مجلات دولية محكمة
- من خريجي قسم الفيزياء بكلية العلوم جامعة المنوفية - مصر، ثم كلف بالعمل في وظيفة معيد بقسم الفيزياء بكلية العلوم جامعة أسيوط، ثم محاضر وذلك بعد حصوله على درجة الماجستير في الفيزياء (فيزياء البلازما) من نفس الجامعة.
- حصل على الدكتوراه في الفيزياء (الموصلية الفائقة) من الجامعة المليية الإسلامية بالهند، ثم كلف بالعمل في وظيفة أستاذ مساعد، ثم أستاذ مشارك بقسم الفيزياء بكلية العلوم جامعة أسيوط، ثم شرف بالعمل بقسم الفيزياء بكلية العلوم جامعة الملك فيصل بالملكة العربية السعودية.
- قام بتدريس مقررات الفيزياء للمراحل الجامعية وبرامج الدراسات العليا بجامعة أسيوط، وجامعة الأزهر، وجامعة الملك فيصل بالسعودية.
- شارك في تأسيس التجارب العملية اللازمة لتطوير المعامل الطلابية، وكذلك إعداد الخطط الدراسية، وبرامج الدراسات العليا بجامعة أسيوط، وجامعة الملك فيصل.
- شارك في تأسيس معمل أبحاث فيزياء البلازما التجريبية بجامعة أسيوط، وكذلك معمل أبحاث فيزياء الجوامد التجريبية، ومعمل أبحاث فيزياء النانو بجامعة الملك فيصل بالسعودية.
- شارك في العديد من المؤتمرات العلمية المحلية والدولية بدول مصر، والهند، والسعودية، وسنغافورة، واليابان.
- تم اختياره عضواً لمدة عام في المؤسسة الأمريكية لتطوير العلوم ٢٠٠٣م.