الميكانيكا الكلاسيكية

المتقدمة

تأليف

د.أيمن محمد الصوالحة
جامعة الملك فيصل

أ.د. عبد العزيز عبد المحسن الملحم
جامعة الملك فيصل

أ.د. عقاب محمود ربيع
جامعة مؤتة

ح جامعة الملك فيصل، ١٤٣٠هـ
فهرسة مكتبة الملك فهد أثناء النشر

الصوالحة، أيمن محمد

الميكانيكا الكلاسيكية المتقدمة، أيمن محمد الصوالحة؛ عبد العزيز عبد المحسن الملحم؛ عقاب ربيع – الأحساء، ١٤٣٠هـ

٢٧٧ص ، ١٧ × ٢٤ سم

ردمك :٢-٠٧٧-٠٨-٩٩٦٠-٩٧٨

١- الميكانيكا أ- الملحم، عبدالعزيز عبد المحسن (مؤلف مشارك)
ب- ربيع، عقاب محمود (مؤلف مشارك) ج – العنوان
ديوي ٥٣١ ١٤٣٠/٢٥٩

رقم الإيداع : ١٤٣٠/٢٥٩
ردمك : ٢-٠٧٧-٠٨-٩٩٦٠-٩٧٨

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

تعتبر الميكانيكا الكلاسيكية أحد أهم، وأقدم الموضوعات الفيزيائية التي ترتكز عليها دراسة علم الفيزياء. ولقد روعي في وضع الكتاب توافقه مع متطلبات مادة الفيزياء الكلاسيكية المتقدمة والتي هي من مسلمات الخطط الدراسية لتخصص الفيزياء في اغلب، إن لم يكن في كل الجامعات. لقد تم إعداد الكتاب ليكون مناسبا ككتاب تدريسي للطلبة المتخصصين في الفيزياء من السنة الثالثة، أو الرابعة الجامعية. كما يمكن إن يكون مناسبا للتدريس في مقرر السنة الأولى لطلبة الدراسات العليا، تخصص فيزياء.

ولقد كان إعداد هذا الكتاب، استجابة للحاجة الماسة لكتاب باللغة العربية في مجال الميكانيكا الكلاسيكية. ومع إن هناك عددا محدودا من هذه الكتب في هذا الموضوع، إلا إن إثراء المكتبة العربية بالكتب الجيدة هو هدف سام، يجب إن لا يغفله المختصون. ذلك إن وجود الكتاب العربي الجيد هو السبيل الأمثل لنقل العلم الحديث إلى الطالب بصورة سهلة لا تستوجب عبئا إضافيا لإتقان اللغة الأجنبية، ولذا جاءت فصول هذا الكتاب لتلبي حاجة المنهج الدراسي لمقرر الميكانيكا

الكلاسيكية والذي هو متطلب أساسي لجميع خطط أقسام الفيزياء في الجامعات.

وقد اشتمل هذا الكتاب على ثمانية فصول. يبداء ألفصل الأول بعرض لأساسيات الميكانيكا الكلاسيكية وميكانيكا نيوتن. وهو يشكل مراجعة سريعة لميكانيكا نيوتن وقوانينه الثلاثة للحركة، مع عرض للكميات الفيزيائية التي تستخدم في علم الميكانيكا الساكنة أو الحركية. في الباب الثاني والثالث تتم دراسة ميكانيكا مجموعة الجسيمات ومن ثم الانتقال الطبيعي لدراسة حركة الجسم الصلد، منطلقين من كون الجسم الصلد هو هذه الحالة المتصلة لعدد كبير من الجسيمات المتناهية الصغر. يتم في الباب الرابع الانتقال إلى ميكانيكا (لاجرانج) والذي يعد طريقة رياضية متقدمة للتعامل مع حركة الجسيمات. كما إن ميكانيكا (لاجرانج) تقدم الطريقة الرياضية السلسة للتعامل مع ميكانيكا هاميلتون، والتي ستعرض في الفصل الخامس لأن الميكانيكا الكمية لايمكن ولوجها إلا عن طريق ميكانيكا هاميلتون، فأن الفصل الخامس سيراعي هذه النقطة. في الباب السابع تتم دراسة الاهتزازات الصغيرة، وذلك لما لهذه الاهتزازات من أهمية كبرى، وتطبيقات عامة في الفيزياء. وستجري دراستها باستخدام الطرق المختلفة لدراسة الميكانيكا (نيوتن، لاجرانج وهاميلتون). وهذه الاهتزازات الصغيرة ستفهم من قبل الطالب وتيسر استيعاب الفيزياء الميكروسكوبية في الموضوعات الفيزيائية التخصصية كفيزياء الجوامد وغيرها. يخصص الفصلان السادس والثامن لموضوعين رياضيين هامين في الميكانيكا الكلاسيكية. هما التحويلات الفيصلية وحساب التغاير. والهدف من إدراجهما هنا هو تهيئة الدارس للطرق الرياضية المتقدمة والتي

يكون استخدامها في بعض المسائل ضروريا لتسهيل التعامل مع تلك المسائل.

نسأل الله العلي القدير التوفيق والمنفعة في إضافة هذا الكتاب للمكتبة العربية وان يكون معينا للجامعات العربية التي اتخذت من لغتنا الغالية أداة لنقل العلم والمعرفة.وان ينتفع بهذا الجهد الطالب العربي.

وختاما لايسعنا إلا إن نقدم الشكر والعرفان لجامعة الملك فيصل لدعمها هذا الكتاب، والمحكمين الذين قاموا بتحكيم هذا الكتاب على ملاحظاتهم القيمة وتشجيعهم على نشره، كما ونشكر الدكتور حسين مناور من قسم اللغة العربية في كلية المعلمين بالإحساء لمراجعته الكتاب من الناحية اللغوية.

والله الموفق

المؤلفون

المحتويات

الصفحة

الفصل الأول:
مقدمة في ميكانيكا نيوتن

الفصل الثاني:
حر ك ة منظومة جسيمات

الفصل الثالث:
الحر ك ة المستوية للأجسام الصلبة

الفصل الرابع:
معادلات لاجرانج

الفصل الخامس:
معادلات هاميلتون

الفصل السادس:
حساب التغاير

الفصل السابع:
الاهتزازات الصغيرة

الفصل الثامن:
الانتقالات الفيصلية

الفصل الأول

مقدمة في ميكانيكا نيوتن

INTRODUCTION TO NEWTONIAN MECHANICS

• مقدمة • قانون نيوتن الأول ونظم المحاور • الكتلة والقوة، قانوني نيوتن الثاني والثالث • كمية التحرك الخطية أو الزخم الخطي • الحركة المستقيمة لجسيم بفعل تأثير قوة ثابتة• الحركة الخطية • القوى المعتمدة على الموضع وقانون حفظ الطاقة • تغير الجاذبية مع الارتفاع • القوى الدفعية • القوى المعتمدة على السرعة والسرعة النهائية • الحركة الاهتزازية • مسائل

(١,١) المقدمة

سنعرض ميكانيكية حركة الأجسام بالاعتماد على قوانين نيوتن للحركة، وفي فصول لاحقة ستتم دراسة هذا الموضوع باستخدام معادلات لاجرانج و هاميلتون الأكثر تطوراً، حيث أن هذه المعادلات تمكننا من حل مسائل أكثر صعوبة لأنها تتعامل مع كميات قياسية، وهي ليست نظريات مختلفة، وإنما معادلات مشتقة من قوانين نيوتن

للحركة ، لقد تمكن اسحاق نيوتن[1] من وضع ثلاثة قوانين للحركة باستخدام مفهوم كل من القوة والكتلة واستطاع أن يفسر الوضع الذي يؤدي إلى تغير حركة الأجسام بالإضافة إلى تفسيره لظاهرة تسارع بعض الأجسام بمعدل اكبر من غيرها. فقوانين الحركة عند نيوتن تتمثل في :

١- **القانون الأول:** كل جسم ساكن، أو متحرك حركة منتظمة في خط مستقيم يحافظ على حالته ما لم تؤثر عليه قوة خارجية.

٢- **القانون الثاني:** معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن (التسارع) يتناسب طرديا مع القوة المؤثرة ويكون باتجاهها.

٣- **القانون الثالث:** لكل فعل رد فعل مساو له في المقدار، ومعاكس له في الاتجاه. فإذا أثر جسمان على بعضهما فان القوتين المتبادلتان بين الجسمين هما قوتا فعل ورد فعل، لهما نفس المقدار وتتضادان في الاتجاه.

وفي ما يلي دراسة مفصلة لهذه القوانين :

(١,٢) قانون نيوتن الأول، ونظم محاور الإسناد القصوريه

إن قانون نيوتن الأول، يعرف لنا نظاما خاصا من المحاور هو نظام محاور الإسناد القصوريه الذي ينطبق فيه قانون نيوتن الأول. والذي يسمى أحيانا قانون القصور (Law of Inertia) لأنه يصف لنا خاصية مشتركة لجميع المواد وهي خاصية القصور، أي: (العجز عن تغيير الحالة بدون مؤثر خارجي).ويعبر عن ذلك بصورة رياضية كما يلي:

$$\sum F = 0 \quad , \quad a = 0$$

(١) اسحاق نيوتن عالم فيزيائي بريطاني (١٦٤٢-١٧٢٧ م).

وتعبر هذه المعادلة عن حالة التوازن للجسم في حالة السكون أو الحركة بسرعة ثابتة. إن من الصعب الحصول على محاور إسناد قصورية: لأن كل ما في الكون في حركة دائبة حيث قال الله تعالى ﴿ وَكُلٌّ فِى فَلَكٍ يَسۡبَحُونَ ﴾[٢]، فالأرض ليست محور إسناد قصوري بسبب حركتها الدورانية حول الشمس وحول محورها، ومع ذلك يمكن اعتبار الأرض محور إسناد قصوري للأغراض الحسابية التي لا تتطلب دقة عالية، ولمزيد من الدقة فان المحور الملتصق بمركز الشمس يكون أكثر قصورا، ولكون الشمس متحركة حيث قال الله تعالى ﴿ وَٱلشَّمۡسُ تَجۡرِى لِمُسۡتَقَرٍّ لَّهَا ﴾[٣]، فانه من البديهي إن ننشد محورا قصوريا بالنسبة لمركز المادة الموجودة في الكون.

ومن التطبيقات العلمية الواضحة على قوانين القصور: اندفاع راكب السيارة للأمام عند التوقف المفاجئ، واندفاعه للخلف عند تحرك السيارة للأمام؛ يحصل ذلك لأن الجسم عاجز عن تغيير حالته من الحركة إلى السكون في الوضع الأول، وقاصر كذلك عن تغيير حالته من السكون إلى الحركة في الوضع الثاني. ولهذا نلاحظ أن قانون نيوتن الأول يجعل من الحركة المنتظمة في خط مستقيم حاله مكافئة تماما لحالة السكون.

---

(٢) الآية رقم (٤٠) من سورة يس.

(٣) الآية رقم (٣٨) من سورة يس.

(١,٣)الـ ك تلة والقوه (قانونا نيوتن الثاني والثالث)

عند تحريك أو إيقاف جسم، فإنه يلزم لذلك قوة تتناسب طرديا مع كتلة الجسم أو قصوره، فلو فرضنا أن جسمين B و A مرتبطان معا بواسطة زنبرك مضغوط، ثم تركا ليتحركا مبتعدين عن بعضهما بفعل القوة الناجمة عن طاقة الوضع المخزونة في الزنبرك، فإننا نلاحظ أن تسارع كل من الجسمين في اتجاه معاكس لاتجاه تسارع الأخر، والنسبة بين تسارعيهما ثابتة، كما توضح العلاقة التالية:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = -\mu_{BA}\frac{d\vec{v}_B}{dt} \qquad (1-1)$$

حيث:

$$\mu_{BA} = \frac{1}{\mu_{AB}} = \frac{m_B}{m_A} \qquad (1-2)$$

حيث: m_A و m_B عبارة عن كتلة قصور الجسمين A و B على الترتيب. النسبة μ_{BA} يجب أن لا تعتمد على وحدة قياس الكتلة، وهذا الشرط يتحقق إذا كانت

$$\mu_{BA} = \frac{\mu_{Bc}}{\mu_{Ac}} \qquad (1-3)$$

حيث c : أي جسم ثالث كتلته m_c. وقد ثبت عمليا أن هذا الشرط صحيح. فإن النسبة بين كتل القصور لجسمين تساوي نسبة قوى الجذب التي تؤثر بها الأرض على الجسمين. وإذا كانت الكتل ثابتة فإن العلاقة (١- ١) تصبح :

$$\frac{d\,\vec{v}_A}{dt} = -\frac{m_B}{m_A}\frac{d\,\vec{v}_B}{dt} \qquad (1-4)$$

وبضرب طرفي المعادلة بالكتلة m_A نحصل على:

$$\frac{d\,(m_A\vec{v}_A)}{dt} = -\frac{d\,(m_B\vec{v}_B)}{dt} \qquad (1-5)$$

المعادلة (٥- ١) تمثل معدل التغير في كمية التحرك أو الزخم الخطي (Linear Momentum) الذي يتناسب مع القوة. إذن نستطيع كتابة القوة $\vec{F}$ المؤثرة على جسم كتلته m وسرعته $\vec{v}$ على النحو :

$$\vec{F} = k\,\frac{d\,(m\,\vec{v})}{dt} \qquad (1-6)$$

حيث k ثابت التناسب بين القوة ومعدل تغير الزخم الناجم عنها. وعندما تكون الكتلة ثابتة، فإن المعادلة(٦- ١) يمكن كتابتها على الصورة:

$$\vec{F} = k\;m\frac{d\,\vec{v}}{dt} = k\;m\;\vec{a} \qquad (1-7)$$

وبذلك نستطيع كتابة المعادلة (٥- ١) كما يلي:

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \qquad (1-8)$$

وهذه النتيجة، هي قانون نيوتن الثالث للقوى المتبادلة بين الكتلتين m_A و m_B. حيث أن قانون نيوتن الثالث ينص على أن لكل فعل رد فعل مساو له في المقدار ومعاكس له في الاتجاه، أي أن القوة التي يؤثر بها الجسم الأول على الجسم الثاني تكون متساوية لكنها معاكسة لاتجاه القوة التي يؤثر بها الجسم الثاني على الجسم الأول.

(١,٤) كمية التحرك الخطية أو الزخم الخطي

يعرف الزخم الخطي $\vec{P}$ لجسم كتلته m ويتحرك بسرعة $\vec{v}$ بأنه يساوي حاصل ضرب كتلته في سرعته المتجهة ، أي أن :

$$\vec{P} \equiv m\,\vec{v} \qquad (1-9)$$

وتعرف القوة المؤثرة عليه كما يلي:

$$\vec{F} = \frac{d\,\vec{P}}{dt} = \frac{d\,(m\,\vec{v}\,)}{dt} \qquad (1-10)$$

وعندما تكون الكتلة m ثابتة ، فإن القوة تصبح:

$$\vec{F} = m\,\frac{d\,\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a} \qquad (1-11)$$

وهذا يعني أن معدل التغير الزمني لكمية الزخم الخطي لجسم ما تساوي محصلة القوى المؤثرة على هذا الجسم، وكذلك يمكن ربط الزخم الخطي بقانون نيوتن الثالث (قانون الفعل ورد الفعل). ويمكن توضيح هذه العلاقة كما يلي: A و B جسمان، القوة المتبادلة بينهما تحقق المعادلتين

$$\vec{F}_{AB} = \frac{d\,\vec{P}_A}{dt}, \quad \vec{F}_{BA} = \frac{d\,\vec{P}_B}{dt} \qquad (1-12)$$

حيث $\vec{F}_{BA}$ هي القوة التي يؤثر بها الجسم A على الجسم B ، و $\vec{F}_{AB}$ هي القوة التي يؤثر بها الجسم B على الجسم A .

ينص قانون نيوتن الثالث على أن:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \qquad (1-13)$$

وباستخدام العلاقة التي تربط بين الزخم الخطي والقوة نجد أن:

$$\frac{d\ \vec{P}_A}{dt} = -\frac{d\ \vec{P}_B}{dt} \qquad (1-14)$$

وبنقل الطرف الأيمن إلى الجهة اليسرى نحصل على:

$$\frac{d\,(\vec{P}_A + \vec{P}_B)}{dt} = 0 \qquad (1-15)$$

إذن

$$\vec{P}_A + \vec{P}_B = \vec{c} \qquad (1-16)$$

العلاقة (١٦- ١) تبين أن مجموع الزخم الخطي لجسمين متفاعلين ضمن نظام معزول يساوي كمية ثابتة $\vec{c}$، وهذا نص قانون حفظ الزخم الخطي (أي أن مجموع الزخم الخطي لأي نظام معزول يبقى ثابتا مع الزمن).

(١,٥) الحركة المستقيمة لجسيم بفعل تأثير قوة ثابتة

عندما تؤثر أكثر من قوة على جسيم كتلته m، فإن هذه القوى تجمع اتجاهيا. و باستخدام قانون نيوتن الثاني، فإن معادلة الحركة لهذا الجسيم تأخذ الصيغة التالية:

$$\vec{F}_{net} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\ \vec{a} \qquad (1-17)$$

حيث: $\vec{a}$ تسارع الجسيم، m كتلته، $\vec{r}$ متجه الموقع له، و $\vec{F}_{net}$ محصلة القوى المؤثرة عليه.عند معرفة الشروط الابتدائية لحركة مجموعة من الجسيمات، فإنه يمكننا من خلال قانون نيوتن الثاني للحركة معرفة سرعتها وموقعها عند أيّة لحظة زمنية. إلا أن هناك بعض المسائل المعقدة، والتي يحتاج حلها إلى استخدام أجهزة الحاسوب، كحركة الصواريخ وحركة الأقمار الصناعية. وفي الحالات التي يكون فيها عدد الجسيمات

كبيرا جدا (غاز مثلا) فإن أجهزة الحاسوب كذلك تعجز عن حل معادلات الحركة وفي هذه الحالات يأتي دور الميكانيكا الإحصائية. لذا رأينا أن نقتصر على دراسة الحالات التي يمكن حلها بدون الحاجة لاستخدام الحاسوب، فضلا عن اللجوء لاستخدام الميكانيكا الإحصائية.

(١,٦) الحر ك ة الخطية، التسارع المنتظم

يصعب تحليل الحركة لأي جسم يتحرك في خط مستقيم إذا كان التسارع متغير لذا نفرض أن يكون التسارع ثابتا أو منتظما ، ففي هذه الحالة تتساوى السرعة المتوسطة للأجسام مع سرعتها اللحظية. وعندما يتحرك جسيم في خط مستقيم فإننا نطلق على هذه الحركة اسم الحركة الخطية (Rectilinear Motion). من الممكن اختيار البعد x اتجاها لهذه الحركة، فتكون معادلة الحركة على النحو التالي:

$$F = F_x(x, \dot{x}, t) = m\ddot{x} \qquad (1-18)$$

حيث: $\dot{x}$ و $\ddot{x}$ سرعة وتسارع الجسيم على الترتيب. ومن أبسط الأمثلة، حالة القوة الثابتة، حيث يكون التسارع ثابتا ويعطى بالعلاقة:

$$a \equiv \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \qquad (1-19)$$

وللحصول على دالة السرعة v، فإننا نكامل التسارع بالنسبة للزمن :

$$\int_{v_o}^{v} dv' = \int_0^t a \quad dt' \qquad (1-20)$$

فتكون النتيجة:

$$\dot{x} \equiv v = at + v_0 \qquad (1-21)$$

وتمثل هذه العلاقة السرعة النهائية للجسم المتحرك.

حيث : v_0 السرعة الابتدائية عند الزمن صفر. وللحصول على دالة الموقع للجسيم بدلالة الزمن فإننا نكامل السرعة بالنسبة للزمن :

$$\int_{x_0}^{x} dx' = \int_0^t (at' + v_0)dt' \qquad (1-22)$$

فتكون النتيجة :

$$x = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \qquad (1-23)$$

وتمثل هذه العلاقة الإزاحة النهائية للجسم.

حيث: x_0 الإزاحة الابتدائية عند الزمن $t=0$. من المعادلة (٢١- ١) نجد الزمن بدلالة السرعة والتسارع :

$$t = \frac{v - v_0}{a} \qquad (1-24)$$

وبتعويض قيمة الزمن في المعادلة (٢٣- ١) نحصل على :

$$x = \frac{a}{2}\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + x_0 \qquad (1-25)$$

ومنها فإن :

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \qquad (1-26)$$

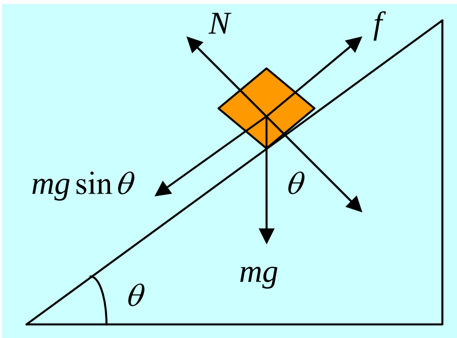
والعلاقات (٢١- ١)، (٢٣- ١) و (٢٦- ١) تمثل معادلات الحركة بتسارع منتظم. ومن تطبيقاتها المهمة : حركة المقذوفات بالقرب من الأرض وحركة الجسم الساقط سقوطا حرا قرب سطح الأرض (في حالة إهمال مقاومة الهواء)، حيث يمكن اعتبار تسارعه تقريبا ثابتا ويساوي تسارع الجاذبية الأرضية $g = 9.8\, m/s^2$. والقوة المؤثرة هي الوزن mg.

مثال (١-١):

جسم كتلته m ينزلق على سطح مائل أملس زاوية ميله عن الأفق θ. أوجد معادلة حركته ؟ ثم أوجد معادلة حركته إذا كان السطح خشنا و معامل احتكاكه الحركي μ ؟

يوضح الشكل (١,١) طبيعة الحركة على مستوى مائل بزاوية مقدارها θ وأن x تمثل الإزاحة في البعد الموازي للسطح المائل ؛ لذا تكون معادلة الحركة للجسم إذا كان السطح أملسا:

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} = g \sin\theta$$



الشكل (١,١): رسم توضيحي يبين القوة المؤثرة على الجسم المنزلق على السطح المائل.

أما إذا كان السطح خشنا ، فإن قوة رد فعل السطح على الجسم هي $N = mg\cos\theta$ ، وبناءً على ذلك، فإن قوة الاحتكاك الحركية بين السطح والجسم هي : $f = \mu\ N = \mu\ mg\ \ \cos\theta$ ، ومحصلة مركبة الوزن وقوة الاحتكاك الحركية المؤثرتين على الجسم في البعد x هي :

$$F_x = mg\ \sin\theta - \mu\ \ mg\ \cos\theta$$

وباستخدام قانون نيوتن الثاني للحركة نجد تسارع الجسم :

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} = \frac{mg \sin\theta - \mu mg \cos\theta}{m} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

إن مقدار السرعة سيزداد إذا كانت القوه المحصلة في معادلة الحركة موجبة، أو $\theta \geq \tan^{-1}\mu$، المقدار $\tan^{-1}\mu$ هو زاوية الاحتكاك الحركي، ويرمز لها بالرمز ε.

ويمكن تفسير ذلك بالحالات التالية:

١- إذا كانت $\theta = \varepsilon$ فإن $\mu = \mu_s = \tan\theta \quad , \quad \ddot{x} = 0$، وعندها ينزلق الجسم للأسفل بسرعة ثابتة. هنا μ_s تمثل معامل الاحتكاك السكوني.

٢- إذا كانت $\theta < \varepsilon$، فإن الجسم سيبقى ساكنا، لأن القوة غير كافية لتحريكه.

٣- وفي حالة الحركة للأعلى يكون التسارع سالبا وقيمته هي:

$$\ddot{x} = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

(١,٧) القوى المعتمدة على الموضع وقانون حفظ الطاقة

إن القوة المؤثرة على جسيم قد تعتمد على موقعه بالنسبة لجسيمات أخرى. ومثال ذلك: القوى الكهروستاتيكية، قوى الجاذبية، قوى الشد والضغط، وإذا كانت القوة لا تعتمد على الزمن أو السرعة، فإنِّ المعادلة التفاضلية للحركة:

$$F(x) = m\ddot{x} \qquad (1-27)$$

ويمكن حل هذا النوع من المعادلات التفاضلية بطرق مختلفة، إحدى هذه الطرق هي قاعدة السلسلة (Chain Rule)، فيكتب التسارع على الشكل التالي :

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad (1-28)$$

وبذالك يمكن كتابة المعادلة التفاضلية للحركة على الصيغة:

$$F(x) = mv\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{m}{2}v^2\right) = \frac{dT}{dx} \qquad (1-29)$$

حيث T الطاقة الحركية للجسم وتساوي $\frac{1}{2}mv^2$، وبإجراء عملية التكامل لمعادلة الحركة :

$$dT = Fdx \qquad (1-30)$$

نحصل على:

$$\int_{T_0}^{T} dT = \int_{x_0}^{x} F\,dx' \qquad (1-31)$$

$$T - T_0 = \int_{x_0}^{x} F(x')dx' = W \qquad (1-32)$$

أي أن الشغل W يساوي التغير في الطاقة الحركية $(T - T_0)$، وهذا القانون يعرف بنظرية الشغل الطاقة (Work- Energy Theorem)، وبشكل عام إذا كانت حركة الجسيم في الأبعاد الثلاثة يكون الشغل:

$$W = \int_0 \vec{F}\,d\vec{r} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1 \qquad (1-33)$$

حيث: v_1 سرعة الجسيم الابتدائية، و T_1 طاقته الحركية قبل أن تؤثر عليه القوة، و v_2 و T_2 هما سرعة الجسيم وطاقته الحركية (على

الترتيب) بعد حركته على المسار بفعل تأثير القوة عليه. يمكن تعريف طاقة الوضع $V(x)$ للجسيم من خلال المعادلة:

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \qquad (1-34)$$

أي أن القوة المؤثرة على الجسيم تساوي سالب التدرج لطاقة الوضع. وبإجراء عملية التكامل

$$\int_{x_0}^{x} F(x')dx' = -\int_{x_0}^{x} dV = -V(x) + V(x_0) = T - T_0 \qquad (1-35)$$

أي أن الشغل يساوي التغير في طاقة الحركة، ويساوي سالب التغير في طاقة الوضع.

ومن المعادلة الأخيرة نستنتج أن مجموع طاقة الحركة وطاقة الوضع يساوي مقدار ثابتا. وهكذا تتحول الطاقة من شكل لأخر وتبقى محفوظة (ثابتة).

$$V(x) + T = V(x_o) + T_0 = E \qquad (1-36)$$

حيث: E الطاقة الميكانيكية الكلية للجسيم. وبشكل عام فإن:

$$V(x) + \frac{m}{2}(v^2) = E \qquad (1-37)$$

وهذه علاقة صحيحة لأي نظام محافظ يخلو من قوى مقاومة تستهلك طاقة النظام، ونستطيع إيجاد سرعة الجسيم بدلالة الطاقة الكلية، وطاقة الوضع من المعادلة السابقة، فنجد:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} \qquad (1-38)$$

وعند مكاملة العلاقة (٣٨- ١) نحصل على دالة موقع الجسيم بدلالة الزمن على النحو التالي:

$$\int_{t_0}^{t} dt' = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{+\sqrt{[E - V(x')]}} \qquad (1-39)$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x')]}} \qquad (1-40)$$

من المعادلة (٣٨- ١) نستنتج أن السرعة حقيقية (كما هو مفترض) لقيم x التي تجعل $V(x)$ أقل أو مساوية للطاقة الكلية E. وهذا يعني أن حركة الجسيم محدودة ومحصورة ضمن قيم x التي تحقق الشرط $V(x) \le E$، عندما يكون $V(x) = E$، تنشأ إحدى الحالات الأربع التالية:

أ) إذا كان الجسيم متحركا فانه سيسكن لحظيا عند تلك النقطة ثم يستمر في الحركة ولكن باتجاه معاكس وتسمى مثل هذه النقاط بنقاط الرجوع (Turning Points).

ب) أن يكون الجسم في حالة اتزان يسمى اتزانا مستقرا (Stable Equilibrium).

جـ) أن يكون الجسم في حالة اتزان يسمى اتزانا غير مستقر (Unstable Equilibrium).

د) أن يكون الجسم في حالة اتزان متعادل (Neutral Equilibrium)

مثال (٢-١)

سقط جسم سقوطا حرا من ارتفاع x_0. جد طاقة الوضع، والطاقة الكلية له، وسرعته عند وصوله سطح الأرض؟

نختار اتجاه الحركة للأعلى لتكون موجبه؛ لذلك تكون قوة جذب الأرض سالبة:

$$-\frac{dV(x)}{dx} = -m\ g$$

ومنها:

$$\int dV(x) = \int m\ g\, dx$$

فإن طاقة الوضع: $V(x) = m\ g\, x + c$

إن قيمة ثابت التكامل c ، تعتمد على المستوى الصفري لطاقة الوضع $V(x)$ ، ويمكن أن نختار $c = 0$ وهذا يعني: أن $V = 0$ عندما $x = 0$ ، فتكون معادلة حفظ الطاقة الميكانيكية على الشكل الآتي:

$$E = \frac{m}{2} v_f^2 = m\ g\ x_0$$

$$= m\ g\ x + \frac{m}{2} v^2$$

حيث سرعة الجسيم عند ارتطامه بالأرض هي:

$$v_f = \sqrt{2\ g\ x_0}$$

مثال (٣-١)

قذف جسم رأسيا للأعلى بسرعة ابتدائية v_0 من النقطة $x = 0$ ، احسب طاقته الكلية وجد معادلة حركته وحدد نقطة الرجوع وسرعة الجسيم وموقعه بدلالة الزمن؟

بم أن قوة الجاذبية الأرضية قوة محافظه؛ فأن الطاقة الميكانيكية الكلية للجسيم ثابتة:

$$E = \frac{m}{2} v_0^2 = mg\ x_{\max}$$

$$= \frac{m}{2} v^2 + mg\ x$$

حيث: $x_{\max}$ يمثل أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم (وهي نقطة الرجوع).

$$mg\ x_{\max} = \frac{m}{2} v_0^2$$

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

ومعادلة الحركة:

$$F = m\ddot{x}$$

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = -mg$$

$$\dot{x} = -gt + v_0$$

حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v_0 هي السرعة الابتدائية للجسيم لحظة قذفه. وبمكاملة دالة السرعة نجد أن دالة موقع الجسيم :

$$x = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + x_0$$

ولكن $x = 0$ عندما $t = 0$ ، مما يجعل قيمة الثابت x_0 في المعادلة السابقة صفرا، فتصبح دالة موقع الجسيم :

$$x = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t$$

(١,٨) تغير الجاذبية مع الارتفاع

إن قوة الجاذبية بين جسمين، تعطى من خلال قانون نيوتن في الجاذبية، فمقدار قوة الجذب بين الأرض وجسم كتلته m هي :

$$F_r = \frac{-GMm}{r^2} \qquad (1-41)$$

حيث G ثابت الجذب العام $(G = 6.672\times10^{-11} N.m^2/Kg^2)$، M كتلة الأرض، r المسافة بين الجسم ومركز الأرض، وتدل الاشاره السالبة على أن F_r هي قوة جذب. وعندما يكون الجسم ملامسا لسطح الأرض، فإن مقدار هذه القوة يساوي: $-mg$. أي أن تسارع الجاذبية الأرضية قرب الأرض:

$$g = \frac{GM}{r_e^2} \qquad (1-42)$$

وإذا كان الجسم على ارتفاع x فوق مستوى سطح الأرض، فإن بعده r عن مركز الأرض هو:

$$r = r_e + x$$

حيث r_e نصف قطر الأرض. وبإهمال القوى الأخرى (مثل مقاومة الهواء) نكتب القوة باستخدام المعادلتين (٤١- ١) و (٤٢- ١) على الصورة :

$$F(x) = \frac{-GMm}{(r_e + x)^2} = \frac{-mg \quad r_e^2}{(r_e + x)^2} = m\ \ddot{x} \qquad (1-43)$$

ولحل المعادلة التفاضلية لحركة جسيم ساقط أو مقذوف للأعلى مع مراعاة تغير قوة الجاذبية، نعوض عن $\ddot{x}$ بقيمتها:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

فينتج:

$$m\ v\frac{dv}{dx} = \frac{-mg\ r_e^2}{(r_e + x)^2}$$

ومنها :

$$\int_{v_0}^{v} m\ v\ dv = \int_{x_0}^{x} \frac{-mg\ r_e^2}{(r_e + x)^2} dx$$

$$\frac{1}{2}m\ v^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg\ r_e^2 \left[\frac{1}{r_e + x} - \frac{1}{r_e + x_0}\right] \qquad (1-44)$$

حيث v سرعة الجسيم عندما يكون على ارتفاع x فوق مستوى سطح الأرض. وهذه النتيجة في الحقيقة، هي معادلة حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية، حيث أن طاقة الوضع على ارتفاعات كبيرة تعطى بالعلاقة:

$$V(x) = \frac{-mg\ \ r_e^2}{r_e + x} \qquad (1-45)$$

بدلا من العلاقة: $V(x) = -mgx$ ، عندما يكون الارتفاع x فوق سطح الأرض صغيراً.

مثال (٤-١)

أوجد سرعة الإفلات v_0 لجسم كتلته m مقذوف للأعلى؟

مجموع الطاقة الابتدائية = مجموع الطاقة النهائية = صفر وذلك لأن المطلوب هو فقط أن يفلت الجسم من جاذبية الأرض دون أن يكون له أيّة طاقة حركية بعد خلاصه من جاذبية الأرض. وإفلات الجسم كذلك، يتطلب أن تصبح طاقة وضعه صفراً. إذن مجموع طاقتي الوضع والحركة للجسم عند قذفه تساوي صفر :

$$\frac{1}{2}m\ v_0^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

حيث r: بعد الجسم عن مركز الأرض لحظة قذفه:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

نلاحظ أن سرعة الإفلات لا تعتمد على كتلة الجسم المقذوف، وحيث إن قيم $G = 6.672x10^{-11} \frac{N.m^2}{kg^2}$ و $r_e = 6.37x10^6\, m$ و $M = 6x10^{24}\, kg$ ، فإن قيمة سرعة الإفلات تساوي $11\ km/\sec$ عندما يقذف الجسم من سطح الأرض، $r = r_e$.

(١,٩) القوى الدفعية

إن الدفع $\vec{I}$ كمية متجهة تساوي تكامل القوة المؤثرة بالنسبة لزمن التأثير :

$$\vec{I} \equiv \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t')d\,t' = \vec{P}(t) - \vec{P}(0) \qquad (1-46)$$

حيث: $\vec{P}(0)$ كمية التحرك للجسيم عند الزمن t_0 ، أي قبل تأثير القوة عليه و $\vec{P}(t)$ كمية التحرك للجسيم عند الزمن t ، وهذا يعني : أن الدفع يساوي التغير في كمية التحرك، أي أن:

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

وعندما تكون الكتلة ثابتة فإن:

$$\vec{F}(t) = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

فينتج :

$$\int_{t_0}^{t} F(t')\ d\ t' = m\left(\vec{v}(t) - \vec{v}_0)\right) \qquad (1-47)$$

حيث : $\vec{v}_0$ السرعة الابتدائية عند الزمن $t = t_0$.

وإذا أردنا أن نجد دالة موقع جسيم يتحرك في بعد واحد ، x ، مثلا ، فإننا نكتب المعادلة السابقة كما يلي:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')\, d\, t' \qquad (1-48)$$

والتي تكاملها :

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t''} \frac{F(t')}{m} d\, t'\right] dt'' \qquad (1-49)$$

حيث : x_0 الموقع الابتدائي عند الزمن $t = t_0$

مثال (٥-١)

إذا أثرت القوة الثابتة F على جسيم كتلته m، فجد سرعته وموقعه بدلالة الزمن؟

باستخدام المعادلة (٤٨- ١) نجد أن دالة السرعة للجسيم:

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_o}^{t} F(t')dt' = v_0 + \frac{F}{m}\int_{t_o}^{t} dt' = v_0 + \frac{F}{m}(t - t_o)$$

حيث : v_0 سرعة الجسيم الابتدائية عند الزمن $t = t_0$، و $\frac{F}{m}$ مقدار التسارع الثابت للجسيم، و $t - t_0$ زمن تأثير القوة على الجسيم. وبمكاملة دالة السرعة بالنسبة للزمن نجد دالة الموقع للجسيم :

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \int_{t_o}^{t} \frac{F(t'' - t_0)}{m} dt''$$

$$= v_0(t - t_0) - \frac{F}{m}\ t_0(t - t_0) + \frac{F(t^2 - t_0^2)}{2m}$$

حيث : x_0 موقع الجسيم الابتدائي عند الزمن $t = t_0$.

مثال (٦-١)

جسيم كتلته m أثرت عليه قوة تتزايد خطيا مع الزمن مقدارها $F(t) = ct$ ، حيث c مقدار ثابت أوجد سرعته وموقعه بدلالة الزمن ؟

عند تعويض مقدار القوة في معادلة الحركة نجد أن:

$$m\frac{dv}{dt} = c\ t$$

إذن :

$$\int_{v_o}^{v} dv' = \frac{1}{m}\int_{0}^{t} ct'\, dt'$$

نجري عملية التكامل بالنسبة للزمن فنحصل على دالة السرعة:

$$v = v_0 + \frac{c}{2m}t^2$$

حيث : v_0 سرعة الجسيم الابتدائية عند الزمن $t = 0$. أما الموضع فيمكن إيجاده على النحو التالي :

$$dx = v\ dt = \left(v_0 + \frac{c}{2m}t^2\right)dt$$

ومنها نحصل على دالة الموقع، فتكون النتيجة :

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{c}{6m}t^3$$

حيث: x_0 موقع الجسيم عند الزمن $t = 0$

(١,١٠) القوى المعتمدة على السرعة، والسرعة الحدية

في بعض الحالات الفيزيائية نجد أن القوة تعتمد على السرعة، ومن الحالات المعروفة، حركة جسم خلال مائع، كحركة هبوط المظلي في المظلة.

معادلة الحركة التفاضلية تكون على الصيغة التالية:

$$F_0 + F(v) = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m\,v\frac{dv}{dx} \qquad (1-50)$$

حيث : F_0 قوة ثابتة لا تعتمد على السرعة، بينما الاقتران $F(v)$ يصف قوة مقاومة المائع للجسم. في الحالات العملية $F(v)$ ليس اقترانا بسيطا، وقد يتوجب إيجاده من خلال التجربة. وبالتقريب يمكن أن نكتب $F(v)$ كما يلي:

$$F(v) = -c_1 v - c_2 v\,|v| = -v\,\{c_1 + c_2|v|\} \qquad (1-51)$$

حيث : c_1 و c_2 ثابتان يعتمدان على شكل، وحجم الجسم، والقيمة المطلقة لسرعته. وأيضا من الحالات الفيزيائية المعروفة التي تعتمد فيها القوى على السرعة، حركة جسيم مشحون بشحنة مقدارها q يتحرك في مجال كهرومغناطيسي. في هذه الحالة، القوة الكهرومغناطيسية تسمى قوة لورنتز (Lorentz Force)) وتعطى بالعلاقة :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\ x\ \vec{B}\right) \qquad (1-52)$$

حيث : $\vec{E}$ و $\vec{B}$ المجالان الكهربائي والمغناطيسي على الترتيب.

مثال (٧-١)

قذف جسيم أفقيا بسرعة ابتدائية v_0 على سطح أفقي أملس، يتعرض الجسيم لتيار هوائي مقاومته $F(v) = -c_1\ v$. أوجد معادلة الحركة ودالتي السرعة والموقع للجسيم، ثم جد الموقع الحدي له ؟

في هذه الحالة نلاحظ أن القوة الثابتة F_0 ،هي قوة جذب الأرض العمودية على اتجاه حركة الجسيم في المستوى الأفقي، وهذه القوة تعادلها قوة رد فعل السطح للجسم ؛ ولذلك تكون معادلة الحركة التفاضلية في المستوى الأفقي:

$$F(v) = -c_1\ v = m\frac{dv}{dt}$$

وبإجراء تكامل معادلة الحركة هذه، نجد دالة سرعة الجسيم على النحو التالي :

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{v'} = -\frac{c_1}{m}\int_{t_0}^{t}dt'$$

$$Ln\frac{v}{v_0} = -\frac{c_1}{m}(t-t_0)$$

ومنها فإن:

$$v = v_0\exp\left\{-\frac{c_1}{m}(t-t_0)\right\}$$

لو اقترضنا أن الجسيم بدأ حركته عند الزمن $t = 0$ ،من الموقع x_0 ، وبسرعة ابتدائية v_0 ، فإن :

$$\frac{dx}{dt} \equiv v_0\exp\left(-\frac{c_1}{m}t\right)$$

وبإجراء تكامل العلاقة الأخيرة لدالة سرعة الجسيم، نحصل على دالة موقع الجسيم :

$$x - x_0 = \int_0^t v_0 \exp\left(-\frac{c_1}{m}t'\right)dt' = v_o \frac{m}{c_1}\left[1 - \exp\left(-\frac{c_1}{m}t\right)\right]$$

الموقع الحدي x_{ter} (Terminal Position) للجسم هو قيمة x عند ما $t = \infty$ ، أي أن :

$$x_{ter} = x_0 + v_0 \frac{m}{c_1}[1 - \exp(-\infty)]$$

$$x_{ter} = x_0 + \frac{m\ v_0}{c_1}$$

مثال (٨-١)

في المثال السابق إذا كانت $F(v) = -c_2 v^2$ ، فجد دالة سرعة الجسيم بدلالة الزمن ؟

من قانون نيوتن الثاني نجد أن المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم هي:

$$a \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{F(v)}{m} = \frac{-c_2 v^2}{m}$$

ثم نجري عملية التكامل :

$$-\frac{m}{c_2}\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{v'^2} = \int_0^t dt'$$

فنحصل على :

$$t = \frac{m}{c_2 v'}\Bigg|_{v_0}^{v}$$

وبتعويض حدود التكامل في الطرف الأيمن نجد :

$$t = \frac{m}{c_2}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right)$$

ومن الممكن كتابة هذه المعادلة على الصيغة التالية:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{c_2}{m} t = \frac{c_2 t\ v_0 + m}{m v_0}$$

إذن نحصل على دالة السرعة بدلالة الزمن :

$$v = \frac{m\ v_0}{c_2\ \ t\ v_0 + m} = \frac{v_0}{\dfrac{c_2\ t\ v_0}{m} + 1}$$

وبإجراء التكامل نحصل على دالة الموقع بدلالة الزمن :

$$x = x_0 + \frac{m}{c_2} Ln\left\{\frac{c_2\ \ t\ v_0}{m} + 1\right\}$$

وبالتعويض عن الزمن باللانهاية نجد أن x تؤول أيضا إلى اللانهاية، وهذا يعني: أنه لا يوجد موضع حدي.

(١,١١) الحركة الاهتزازية

إن الحركة الدورية من أكثر الحركات حدوثا في هذا الكون الزاخر بآيات الله سبحانه وتعالى، فحركة النجوم، والكواكب، والأقمار، هي حركات دورية تعيد نفسها خلال فترة محدودة قد تطول أو تقصر، حسب قوانين وضعها الخالق سبحانه وتعالى، والحركات الاهتزازية هي نوع من الحركات الدورية، ومن الأمثلة على الحركات الاهتزازية: حركة رقاص الساعة (البندول) واهتزاز الذرات في التركيب

البلوري للمادة،واهتزاز أوتار الآلات الموسيقية، واهتزاز جزيئات الهواء في الآت الموسيقى الهوائية،وهذه الحركات منها البسيط،ومنها المعقد، وسنركز هنا على دراسة الحركة التوافقية البسيطة مستخدمين قوانين نيوتن، وفي فصول لاحقة سوف ندرس الحركة الاهتزازية باستخدام معادلات لاجرانج.

(١,١١,١) الحر ك ة التوافقية البسيطة

في الحركة التوافقية البسيطة لجسم يتحرك في بعد واحد (x)، من الملاحظ أن موقعه بالنسبة لنقطة الاتزان (نقطة الاتزان هي: النقطة التي تكون عندها القوة المؤثرة على الجسم صفرا).

يتغير مع الزمن وفقا للعلاقة:

$$x = A \cos(\omega t + \delta) \qquad (1-53)$$

حيث: A سعة الاهتزاز، وهي أقصى إزاحة للجسم حول موضع اتزانه، و δ زاوية الطور و ω التردد الزاوي. والعلاقة التي تربط الزمن الدوري للاهتزاز T مع التردد الزاوي ω هي:

$$\omega \equiv 2\pi f \equiv \frac{2\pi}{T} \qquad (1-54)$$

حيث: f تمثل التردد، أي عدد المرات التي تتكرر فيها الحركة خلال الثانية الواحدة.

ويمكن إيجاد سرعة الجسم وتسارعه حول موضع اتزانه على النحو التالي:

سرعة الجسم هي المشتقة الأولى لدالة الموقع:

$$\dot{x} = v \equiv \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta) \qquad (1-55)$$

تسارع الجسم حول موضع اتزانه هوالمشتقة الأولى لدالة السرعة:

$$\ddot{x} \equiv \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \qquad (1-56)$$

من المعادلتين(٥٣- ١) و(٥٦- ١) نجد أن العلاقة بين إزاحة الجسم وتسارعه هي :

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \qquad (1-57)$$

أي إن كلا من التسارع والقوة يتناسبان طرديا مع الإزاحة واتجاههما يكون في الاتجاه المعاكس للإزاحة:

عندما تكون $\sin(\omega t + \delta) = -1$ ، فإن سرعة الجسم تصبح أقصى ما يمكن

$$v_{\max} = -\omega A(-1) = \omega A \qquad (1-58)$$

في حين عندما تكون $\cos(\omega t + \delta) = -1$ ، يكون تسارع الجسم أقصى ما يمكن :

$$a_{\max} = -\omega^2 A(-1) = \omega^2 A \qquad (1-59)$$

إذا بدأ الجسم حركته عند الزمن $t = 0$ من الموقع x_0 بسرعة ابتدائية v_0 ، فإن العلاقتين اللتين تربطان زاوية الطور وسعة الاهتزاز بقيمة كل من x_0 و v_0 هما :

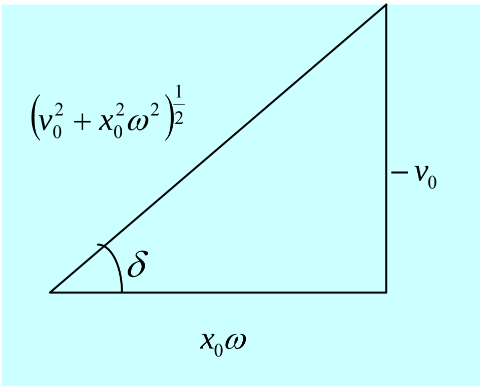
$$x_0 = A \cos \delta \ ، v_0 = -\omega A \sin \delta$$

لإيجاد سعة الاهتزاز تقسم السرعة الابتدائية v_0 على الموقع الابتدائي x_0 ، فينتج :

$$\frac{v_0}{x_0} = -\frac{\omega \ A \ \sin \ \delta}{A \ \cos \ \delta} = -\omega \ \tan \ \delta$$

لكن :

$$A = \frac{x_0}{\cos \ \delta}$$



الشكل (١,٢).

اعتماداً على الشكل (١,٢)، نعوض قيمة $\cos\delta$ بدلالة قيمتي السرعة والموقع عند بداية الحركة، فنجد أن سعة الاهتزاز :

$$A = \frac{x_0}{x_0\omega}\sqrt{v_0^2 + x_0^2\omega^2}$$

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{v_0^2 + x_0^2\omega^2}$$

وبصورة أخرى :

$$A=\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2}+x_0^2} \qquad (1-60)$$

إن الحركة التوافقية البسيطة تتميز بعدة خصائص، أهمها:

١- أنها توصف بمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، وينطبق بشأنها مبدأ التراكب. فإذا وجد حلان x_1 و x_2 لدالة الموقع، فإن $c_1x_1+c_2x_2$ هو حل آخر لدالة الموقع، حيث c_1 و c_2 ثابتان، ويسمى هذا الحل بالحل العام.

٢- إن التردد والزمن الدوري (الفترة الزمنية اللازمة حتى تعيد الحركة نفسها) لا يعتمدان على إزاحة الجسم العظمى عن موضع اتزانه.

٣- يكون اتجاه القوة المسببة للحركة معاكسا لاتجاه الإزاحة $(F)\ \alpha(-x)$.

٤- الإزاحة، والسرعة، والتسارع، جميعها تتغير على شكل دالة جيبية مع الزمن، إلا أنها مختلفة في الطور.

(١,١١,٢) المذبذب التوافقي

إذا أثرت قوة على جسم بحيث ترجعه باستمرار لموضع اتزانه عندما يزاح الجسم عنه، فإن الحركة الناجمة هي حركة اهتزازية، ومن الأمثلة على هذه الحركة: حركة جسم كتلته m معلق من الطرف الحر لزنبرك معامل مرونته k.

إن القوة التي يؤثر فيها الزنبرك على الجسم تعطى بقانون هوك:

$$F(x)=-k(x-x_e) \qquad (1-61)$$

والإشارة السالبة تعني أن القوة $F(x)$ تؤثر في اتجاه معاكس لاتجاه الإزاحة.

حيث إن: $X = x - x_e$ تمثل إزاحة الجسم عن موقع اتزانه x_e ، والذي تكون عنده القوة المؤثرة على الجسم $F = 0$. باستخدام قانون نيوتن الثاني للحركة، نجد أن معادلة حركة الجسم هي:

$$F(x) = -kX = m\ \ddot{x} = m\ \ddot{X}$$

$$m\ \ddot{X} + kX = 0 \qquad (1-62)$$

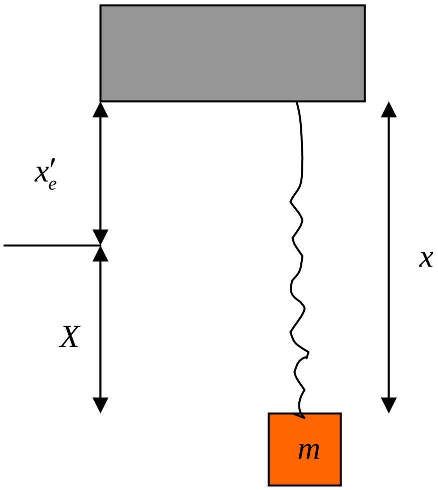
نستطيع استخدام حل للمعادلة السابقة على الصيغة التالية:

$$X = A\ \cos(\omega_0 t + \delta) \qquad (1-63)$$

حيث أن قيمة الثابتين A و δ تتعين تبعا للشروط الابتدائية للحركة، و $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. إن هذه الحركة وأشباهها تسمى حركة توافقية بسيطة، والقوة التي يؤثر بها الزنبرك على الجسم، تسمى قوة الإرجاع.

(١,١١,٣) تأثير القوة الثابتة الخارجية على الحركة التوافقية

لتوضيح تأثير القوة الثابتة الخارجية على الحركة التوافقية، نأخذ زنبركا معامل مرونته k ، مهمل الكتلة، ومعلق رأسيا من أحد أطرافه، بينما الطرف الأخر الحر علقت به كتلة مقدارها m انظر الشكل (١,٣).



الشكل (١,٣): زنبرك معامل مرونته k ، مهمل الكتلة، ومعلق رأسيا من أحد أطرافه، بينما الطرف الأخر الحر علقت به كتلة مقدارها m.

إن مقدار القوة المحصلة التي تؤثر على الكتلة هي:

$$F = -k(x - x_e) + mg \qquad (1-64)$$

هذا على افتراض إن اتجاه الإزاحة x موجب للأسفل، ونستطيع كتابة مقدار القوة على الصيغة: $F = -kX + mg$ حيث فرضنا أن $X = x - x_e$ كما مر بنا سابقا، ولكن من الأفضل تعريف X على أنها الإزاحة عن موضع الاتزان الجديد x_e والذي يتحدد بجعل $F = 0$. إذن

$$0 = -k(x'_e - x_e) + mg$$

ومنها نجد أن موضع الاتزان الجديد:

$$x'_e = x_e + \frac{mg}{k} \qquad (1-65)$$

فتكون قيمة X :

$$X = x - x_e' = x - (\frac{mg}{k} + x_e) \qquad (1-66)$$

وبتعويض قيمة $x - x_e$ من المعادلة (٦٦- ١) في المعادلة (٦٤- ١) نحصل على:

$$F = -k(X + \frac{mg}{k}) + mg = -kX \qquad (1-67)$$

بإيجاد المشتقة الثانية للعلاقة (٦٦- ١) بالنسبة للزمن نجد أن $\ddot{X} = \ddot{x}$. نستخدم قانون نيوتن الثاني فنجد أن المعادلة التفاضلية للحركة هي:

$$m\ddot{X} + kX = 0 \qquad (1-68)$$

لقد مر بنا أن حل هذه المعادلة يعطى بالعلاقة:

$$X(t) \equiv x - \frac{mg}{k} - x_e = A\cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$x = \frac{mg}{k} + x_e + A\cos(\omega_0 t + \delta) \qquad (1-69)$$

حيث إن سعة الاهتزاز و زاوية الطور δ تتحددان حسب الشروط الابتدائية للحركة.

مثال (٩-١)

زنبرك مهمل الوزن معامل مرونته k معلق رأسيا، ويحمل في طرفه الحر كتلة مقدارها m ، استطال الزنبرك مسافة D_1 بفعل تأثير الكتلة m ، ثم سحب للأسفل فاستطال مسافة إضافية قدرها D_2 من موضع اتزانه، وترك عند الزمن $t = 0$. جد ما يلي:

١- موقع الكتلة ؟

٢- سرعة الكتلة عند مرورها في نقطة الاتزان ؟

٣- تسارع الكتلة عند نقطة الرجوع ؟

إن النقطة التي تقابل استطالة الزنبرك مسافة D_1 لتحد د موضع الاتزان:

$$F(x_e) = -kD_1 + mg = 0$$

نستطيع كتابة معامل مرونة الزنبرك بدلالة الاستطالة D_1 على النحو التالي :

$$k = \frac{mg}{D_1}$$

بتعويض قيمة k ، نجد أن التردد الزاوي لاهتزاز الكتلة :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{D_1}}$$

وموقع الجسم بشكل عام :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

ودالة السرعة:

$$\dot{x}(t) = -A\,\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$$

من الشروط الابتدائية للحركة نستطيع إيجاد زاوية الطور وسعة الاهتزاز على النحو الآتي:

$$D_2 = A \cos \delta$$

$$\dot{x}_0 = 0 = -A\,\omega_0 \sin \delta$$

$$D_2 = A\,,\ \text{عندما}\ \ \delta = 0$$

وبذلك تكون دالة الموقع للجسم:

$$x(t) = D_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}\, t \right)$$

ودالة السرعة:

$$\dot{x}(t) = -D_2 \sqrt{\frac{g}{D_1}}\ \sin\ \left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}\, t \right)$$

ودالة التسارع هي:

$$\ddot{x}(t) = -D_2 \frac{g}{D_1} \cos\ \left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}\, t \right)$$

السرعة في موقع الاتزان تساوي:

$$\dot{x} = D_2 \sqrt{\frac{g}{D_1}}$$

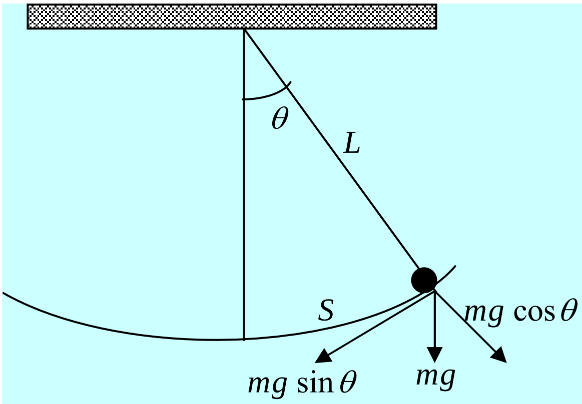
وهي عبارة عن أقصى سرعة يصلها الجسم، كما أن التسارع في نقطة الرجوع :

$$\ddot{x} = D_2 \frac{g}{D_1}$$

ويمثل أقصى تسارع يصل إليه الجسم أثناء الحركة.

مثال (١٠-١)

بندول بسيط كتلته m وطوله L ، يتحرك في المستوى $x-y$. جد دالة الموقع والزمن الدوري للبندول ؟ انظر الشكل (١,٤).



الشكل(١,٤): القوى المؤثرة على حركة البندول البسيط.

نحلل وزن الجسم mg إلى مركبتين : أحداهما مماسية ، والأخرى عمودية على مسار الحركة، كما في الشكل(٤- ١)، والقوة المماسية تمثل القوة المرجعة F_s والتي بسببها تحصل الحركة التوافقية البسيطة وبتطبيق قانون نيوتن الثاني نحصل:

$$F_s = -mg \sin\theta = m\ddot{S}$$

هنا: S تمثل إزاحة الجسم على خط سيره عن موقع اتزانه (الذي يقابل الوضع الرأسي للبندول $\theta = 0$) ومنها:

$$m\ddot{S} + mg \sin\theta = 0$$

ولكن $S = L\theta$ ، حيث الزاوية θ مقاسة بالتقدير الدائري. عندما تكون الزاوية θ صغيرة ؛ فإن $\theta \cong \tan\theta \cong \sin\theta$ ، وعندها نستطيع كتابة معادلة الحركة على النحو التالي :

$$mL\ddot{\theta} + m\ g\ \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة ترددها الزاوي:

$$\omega_0 = 2\pi\ f\ = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

وبالتالي فان الزمن الدوري (Periodic Time) للحركة الاهتزازية يعطى كما يلي:

$$T_0\ = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

وهناك الأمثلة الكثيرة على الحركة الاهتزازية لا نود ذكرها في هذا الفصل لأننا سنناقشها باستخدام معادلات لاجرانج وهاميلتون.

(١,١١,٤) الطاقة والحر ك ة الاهتزازية للبندول البسيط

يمكن تمثيل البندول البسيط بجسيم كتلته m معلق في الطرف الحر لخيط مهمل الكتلة طوله L مثبت طرفه الآخر في سقف غرفة. الوضع العمودي للخيط يمثل نقطة الاتزان للجسيم، والتي تكون عندها الزاوية $\theta = 0$. لو أزيح الجسيم المعلق في الخيط عن الوضع الرأسي قليلا ليصنع زاوية θ_0. ثم ترك يتأرجح تحت تأثير قوة جذب الأرض، فإننا نلاحظ أن الزاوية القصوى التي يصنعها الخيط مع الوضع الرأسي تتناقص تدريجيا بفعل تأثير قوة الاحتكاك مع الهواء، معربة عن تضاؤل (خمود) الحركة الاهتزازية للبندول. فعند دراسة الحالة التي تكون فيها قوة الاحتكاك مع الهواء مهملة. نلاحظ أن الزاوية التي يصنعها الخيط مع الوضع الرأسي تنحصر في المدى $\theta_0 \geq \theta \geq -\theta_0$. في هذه الحالة تشكل

الحركة الاهتزازية للبندول حركة توافقية بسيطة، ولو فرضنا أن طاقة الوضع عند نقطة الاتزان صفر، فان طاقة الوضع عند الزاوية θ هي:

$$V(\theta) = mg\ h = mg\ L(1-\cos\theta) \qquad (1-70)$$

وعند ما تكون الزاوية θ صغيرة كما في الشكل (٤- ١) فإنه يمكن اعتبار:

$$\cos\theta \cong (1-\frac{\theta^2}{2}) \qquad (1-71)$$

والقيمة التقريبية لطاقة الوضع هي:

$$V \cong mg\ L\ (1-1+\frac{\theta^2}{2}) = mg\ L\frac{\theta^2}{2} \qquad (1-72)$$

إن قيمة الزاوية θ بالتقدير الدائري $\theta = \frac{S}{L}$، حيث S طول القوس المقابل، و L طول البندول. إن طاقة الوضع بدلالة S هي:

$$V \cong \frac{mg\ L}{2}(\frac{S}{L})^2 = \frac{mg}{2L}S^2 \qquad (1-73)$$

يمكن كتابة الطاقة الميكانيكية الكلية E بدلالة كل من الإزاحة S والسرعة $\dot{S}$ كما يلي :

$$E = T + V \cong \frac{m}{2}(\dot{S})^2 + \frac{mg}{2L}S^2 \qquad (1-74)$$

ومنها فإن:

$$\frac{dS}{dt} \equiv \dot{S} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{mg}{2L}S^2\right]} \qquad (1-75)$$

مثال (١١-١)

إذا علمت أن طاقة الوضع لجسيم كتلته m يتحرك في البعد x هي:

$$V(x) = B\,x^2 + A\,x^{-2}$$

حيث A و B ثابتان موجبان. فجد موقع اتزان الجسيم، ثم بين أن الزمن الدوري للاهتزازات الصغيرة حول موقع الاتزان هو : $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{8B}}$ ؟.

$$V(x) = B\,x^2 + A\,x^{-2}$$

$$\left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x_0} = 2B\,x_0 - 2\;A\,x_0^{-3} = 0$$

$$x_{\mathrm{O}}(2B - 2\;A\,x_{\mathrm{O}}^{-4}) = 0$$

$$x_{\mathrm{O}} = 0 \quad , \quad x_{\mathrm{O}} = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{4}}$$

تكون طاقة الوضع مالا نهاية عند النقطة $x_{\mathrm{O}} = 0$ ، لذلك فهي ليست نقطة اتزان.

أما: عند النقطة $x_{\mathrm{O}} = \left(\dfrac{A}{B}\right)^{1/4}$ ، فإن المشتقة الثانية لطاقة الوضع :

$$\left.\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right|_{\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{4}}} = 2B + 6\;A\frac{B}{A} = 8B > 0$$

إذن النقطة $x_{\mathrm{O}} = \left(\dfrac{A}{B}\right)^{1/4}$ تمثل موقع اتزان، وتكون طاقة الوضع عندها أصغر ما يمكن. باستخدام متسلسلة تايلور نستطيع كتابة القيمة التقريبية للقوة على الصورة التالية:

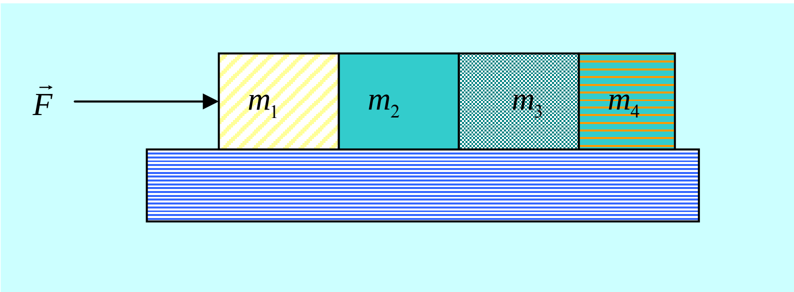
$$F(x) \cong F(x_O) + \frac{dF}{dx}\Big|_{x_O}(x - x_O) = -k\,(x - x_O)$$

قيمة ثابت المرونة للحركة الاهتزازية: $k = 8B$ والتردد الزاوي: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8B}{m}} = \frac{2\pi}{\tau}$ ، والزمن الدوري : $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{8B}}$

(١,١٢) مسائل

السؤال الأول:

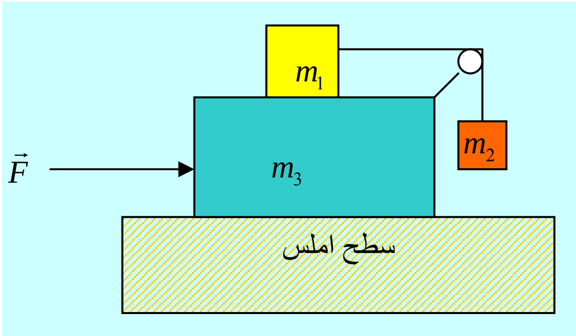
أربعة أجسام متلاصقة، كتلتها m_1, m_2, m_3 و m_4 ، تنزلق على سطح أفقي أملس بفعل تأثير القوة الخارجية $\vec{F}$ ، الشكل (١,٥). جد التسارع لكل كتلة، ثم مقادير قوى الفعل ورد الفعل المتبادلة بين كل جسمين متلاصقين؟



الشكل (١,٥): أربعة أجسام متلاصقة كتلتها m_1, m_2, m_3 و m_4 تنزلق على سطح أفقي أملس بفعل تأثير القوة الخارجية $\vec{F}$.

السؤال الثاني:

معتمدا على الشكل (١,٦)، أوجد مقدار القوة $\vec{F}$ اللازمة لجعل المجموعة تتحرك بحيث لا تنزلق الكتلتان m_1 و m_2 . مع العلم أن قوى الاحتكاك وكتلة الحبل مهملة ؟



الشكل (١،٦): تتحرك الكتلتان m_1, m_2 بفعل تأثير القوة الخارجية $\vec{F}$ دون انزلاق.

السؤال الثالث:

قمر صناعي كتلته m يسير في مسار دائري على ارتفاع h من سطح الأرض، أوجد سرعته وزمن دورته بدلالة كل من h وثابت الجذب العام G وكتلة الأرض M_E ونصف قطرها R_E ؟

السؤال الرابع:

إذا كانت العلاقة بين سرعة جسيم، $\dot{x}$ ، وإزاحته، x ، هي:

$$\dot{x} = bx^{-3}$$

حيث b ثابت موجب، فجد القوة المؤثرة على الجسيم بدلالة موقعه ؟

السؤال الخامس:

احسب السرعة $\dot{x}$ بدلالة الإزاحة x لجسم كتلته m ، إذا علمت أن القوة المؤثرة عليه $F = F_0 + cx$

حيث: c و F_0 ثابتان. افرض أن الجسيم بدأ حركته من السكون عند الموقع $x_0 = 0$

السؤال السادس:

أوجد القوة المرافقة لدالة طاقة الوضع التالية:

$$V = c \ \exp-(\alpha \ x + \beta \ y + \gamma \ z)$$

ثم أوجد قيمة الثابت β الذي يجعل دالة القوة

$$\vec{F} = \hat{i}(z/y) + \beta \ \hat{j}(zx/y^2) + \hat{k}(x/y)$$

محافظة؟

السؤال السابع:

جسيم كتلته m ، تؤثر عليه القوة $F = k\upsilon \, x$ حيث k ثابت موجب، و v سرعة الجسيم، و x موقعه. أوجد دالة موقع الجسيم بدلالة الزمن، إذا علمت أن الجسيم يمر في نقطة الأصل بسرعة v_0 عند الزمن $t = 0$ ؟

السؤال الثامن:

يسقط جسيم في مائع مقاومته تتناسب مع سرعة الجسيم، $F(v) = -c_1 v$. أوجد سرعته بدلالة الزمن والسرعة الحدية والمميز الزمني $\tau = \dfrac{m}{c_1}$. ثم أوجد دالة السرعة إذا سقط الجسم سقوطا حراً.

السؤال التاسع:

سقطت كرة صغيرة كتلتها m في سائل لزج. إذا علمت أن السرعة الابتدائية صفر والحدية $0.40\,m/s$ ، أوجد قوة الممانعة (المقاومة) بدلالة الزمن ؟

$$c_1 v = -m\frac{dv}{dt} - mg$$

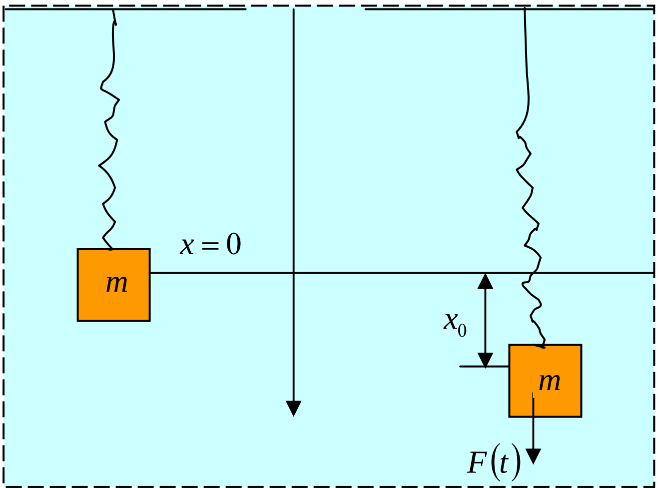
السؤال العاشر:.

يتحرك جسيم داخل مائع مقاومته تتناسب مع مربع سرعة الجسيم $F(v) = -c_2 v^2$ ،

حيث c_2 ثابت تناسب موجب القيمة. أوجد سرعة الجسيم بدلالة الزمن: (α) في حالة الصعود ، (β) في حالة النزول ؟ أثبت أن $v = 0.99991 v_t$ بعد زمن مقداره 5τ ؟

السؤال الحادي عشر:

زنبرك ثابت مرونته k ، معلق من أحد طرفيه، ثبت بطرفه الحر كتلة مقدارها m ، ثم سحب مسافة مقدارها x_o من موضع اتزانه، ثم ترك ليهتز بسرعة ابتدائية v_o ، وفي نفس اللحظة طبقت على النظام قوة خارجية $F(t)$ ، حيث t الزمن، كما في الشكل (١,٧). أوجد المعادلة التفاضلية لحركة هذا النظام؟



الشكل (١,٧): زنبرك معلق في طرفه الحر كتلة معلقة.

(١,١٣) المراجع

١- د. رأفت واصف كامل، "أساسيات الفيزياء الكلاسيكية المعاصرة"، دار النشر للجامعات المصرية - القاهرة، الطبعة الأولى، ١٩٩٣م.

2-S.Thornton and J. Marion, ”Classical Dynamics”, 4th d., Thomson Books, 2004.

3- Keith Symon, ”Mechanics”, 3rd ed., Addison-Wesley, 1992.

4- Sears, Zemansky, ”University Physics”,10th ed., Addison-Wesley, 2000.

حركة منظومة جسيمات

• المقدمة • مركز الكتلة والزخم الخطي • الزخم الزاوي لمنظومة من الجسيمات • الطاقة الحركية لمنظومة جسيمات ومبدأ حفظ • الكتلة المصغرة • التصادمات • معامل الارتداد • مسألة الجسمين • مسائل

(٢,١) المقدمة

لدراسة حركة منظومة مؤلفة من عدد كبير من الجسيمات، أو حركة أجسام صلبة مؤلفة من عدد كبير جدا من الذرات، فسوف نركز اهتمامنا على المفهوم العام لحركة تلك الجسيمات فنعرّف في هذا الفصل مركز الكتلة لعدد من الجسيمات وندرس حركته ونستنتج مبدأ حفظ الزخم الخطي والزخم الزاوّي وسوف ندرس أخيراً حالة التصادم بين جسمين، سواء على خط مستقيم (أي في بعد واحد) أو مستو (أي في بعدين) معرفين خلال ذلك التصادمات المرنة وغير المرنة.

(٢,٢) مركز الكتلة والزخم الخطي

إذا كانت منظومة الجسيمات تتكون من n جسيم كتلتها $m_1, m_2, ..., m_n$ وموجودة في المواضع $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ على الترتيب. يعرف مركز الكتلة لهذه المنظومة بالعلاقة:

$$\vec{r}_{c.m}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+...+m_n\vec{r}_n}{m_1+m_2+...+m_n}$$

لكن

$$M=m_1+m_2+....+m_n=\sum_{i=1}^{n}m_i$$

حيث تدل M على الكتلة الكلية للمنظومة، ولهذا نكتب:

$$\vec{r}_{c.m}=\frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+....+\vec{m}_n\vec{r}_n)$$

$$\vec{r}_{c.m}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i \qquad ......(2-1)$$

وبأخذ مركبات المعادلة (٢- ١) نجد أن:

$$x_{c.m}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_ix_i$$

$$y_{c.m}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_iy_i$$

$$z_{c.m}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_iz_i \qquad ....(2-2)$$

وباشتقاق المعادلة (١- ٢) نجد أن:

$$M\,\dot{\vec{r}}_{c.m}=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i=m_1\dot{\vec{r}}_1+m_2\dot{\vec{r}}_2+....+m_n\dot{\vec{r}}_n \qquad ......(2-3)$$

لكن

$$m_1\dot{\vec{r}}_1=\vec{p}_1 \quad , \quad m_2\dot{\vec{r}}_2=\vec{p}_2 \quad , \quad .... \quad , \quad m_n\dot{\vec{r}}_n=\vec{p}_n$$

كما أن:

$$M\,\dot{\vec{r}}_{c.m}=\vec{P}_{c.m}$$

أي أن الزخم الخطي لمنظومة من الجسيمات يساوي سرعة مركز الكتلة مضروبة في الكتل الكلية للمنظومة.

لذلك المعادلة (٣- ٢) يمكن إن تكتب على الشكل التالي:

$$\vec{P}_{c.m} = M\ \dot{\vec{r}}_{c.m} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots\ldots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \qquad \ldots\ldots.(2-4)$$

من العلاقة (٤- ٢) نلاحظ إن الزخم الخطي لمركز الكتلة يساوي مجموع الزخم الخطي لكل الجسيمات. وباشتقاق المعادلة (٤- ٢) أيضاً نجد أن:

$$\frac{d\vec{P}_{c.m}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \ldots. + \frac{d\vec{p}_n}{dt} \qquad \ldots\ldots.(2-5)$$

لكن $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$ وهي محصلة القوى المؤثرة على الجسيم m_i، ولذلك يكون :

$$\frac{d\vec{P}_{c.m}}{dt} = M\ \ddot{\vec{r}}_{c.m} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots + \vec{F}_n \qquad \ldots\ldots.(2-6)$$

أي أن :
$$\vec{F}_{ext.} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}_{c.m}}{dt} \qquad \ldots\ldots.(2-7)$$

فمحصلة القوى الخارجية المؤثرة على كل الجسيمات تساوي نسبة تغير الزخم الخطي الكلي لمركز الكتلة، أي أن مركز الكتلة يتحرك كجسيم له كتلة الجسيمات كلها وخاضع لمحصلة القوى الخارجية المؤثرة عليها فقط وذلك لأن مجموع القوى الداخلية المتبادلة بين الجسيمات محصلتها مساوية للصفر. ونستنتج من المعادلة (٧- ٢) أنه إذا كان:

$$\vec{F}_{ext.} = 0$$

عندئذ يكون

$$\vec{P}_{c.m} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = const.$$

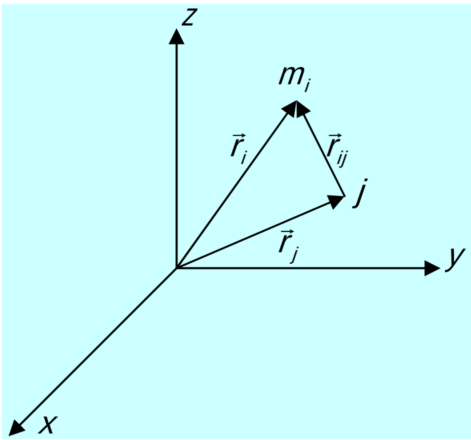
وهذا هو مبدأ حفظ الزخم الخطي لمجموعة من الجسيمات.

(٢,٣) الزخم الزاوي لمنظومة من الجسيمات

لنفترض أن لدينا جسيما m_i في الموضع $\vec{r}_i$ ولنحدد زخمة الزاوي بالنسبة للنقطة j المحددة بالمتجه $\vec{r}_j$ والموضحة في الشكل (١- ٢). فنكتب:

$$\vec{L}_{ij} = \vec{r}_{ij} \times m_i \vec{\upsilon}_i = \vec{r}_{ij} \times \vec{p}_i$$

حيث تدل $\vec{\upsilon}_i$ على سرعة الجسيم m_i بينما تدل $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ على متجه يبدأ من النقطة j إلى موضع الجسيم m_i.انظر الشكل (٢,١).



الشكل (٢,١): موضع الجسيم m_i.

فإذا كان هناك عدد من الجسيمات $m_1, m_2, ..., m_n$ موزعة عند المواضع $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ على الترتيب، عندئذ يكون الزخم الزاوي الكلي لهذه الجسيمات بالنسبة ل j هو :

$$\vec{L}_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{r}_{ij} \times \vec{\upsilon}_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{ij} \times \vec{p}_i \qquad ....(2-8)$$

لنفترض الآن أن النقطة j ثابتة، أي أن $\vec{r}_j = 0$ ، عندئذ نجد من المعادلة (٨- ٢) أن:

$$\frac{d\vec{L}_j}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_{ij} \times \vec{p}_i$$
$$= \sum_i \left[\frac{d\,\vec{r}_{ij}}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_{ij} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] \qquad ......(2-9)$$

لكن:

$$\sum_i \frac{d\,\vec{r}_{ij}}{dt} \times \vec{p}_i = \sum_i \frac{d\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)}{dt} \times \vec{p}_i$$
$$= \sum_i \frac{d\,\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i = 0$$

كما أن:

$$\sum_i \vec{r}_{ij} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_i$$

وكذلك:

$$\vec{\tau}_j = \sum_i \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_i \qquad ......(2-10)$$

حيث تدل $\vec{\tau}_j$ على عزم القوى الخارجية الكلية المؤثرة على الأجسام كلها بالنسبة للنقطة j ، وذلك بفرض أن عزم القوى الداخلية المتبادلة بين هذه

الجسيمات بالنسبة إلى j معدوم. عندئذ تصبح المعادلة (٩- ٢) على الشكل التالي :

$$\vec{\tau}_j = \frac{d\vec{L}_j}{dt} \qquad ....(2-11)$$

ونستنتج من المعادلة الأخيرة (١١- ٢) إن نسبة التغير في الزخم الزاوي لمنظومة من الجسيمات حول نقطة تساوي عزم القوى الخارجية الكلي حول هذه النقطة.ليس هذا شكلا من أشكال قانون نيوتن الثاني فالمولد الفيزيائي مختلف تماما ، ولكن يمكن مقارنته بقانون نيوتن الثاني من ناحية الشكل الرياضي وذلك أذا اعتبرنا أن عزم القوة قد حل محل القوة والزخم الزاوي قد حل محل الزخم الخطي. ونلاحظ من المعادلة (١١- ٢) أنه إذا كانت:

$$\vec{\tau}_j = 0 \qquad ....(2-12a)$$

عندئذ يكون:

$$\vec{L}_j = const. \qquad .....(2-12b)$$

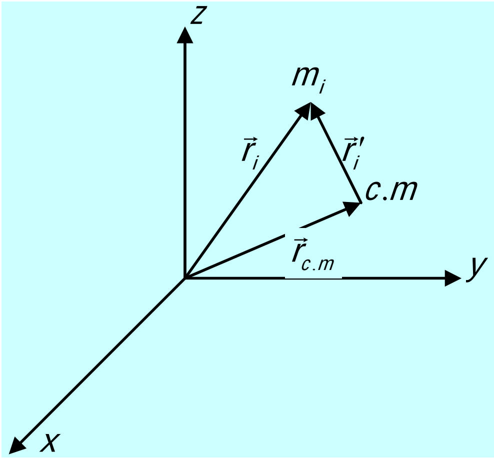
وهذا هو مبدأ حفظ الزخم الزاوي.

(٢,٤) الطاقة الحر كية لمنظومة جسيمات ومبدأ حفظ الطاقة

الطاقة الحركية الكلية T لمنظومة جسيمات تساوي مجموع طاقات الجسيمات في المنظومة ، أي أن:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{\upsilon}_i \cdot \vec{\upsilon}_i\right) \qquad ....(2-13)$$

فإذا حددنا موضع الجسيم m_i بالمتجه $\vec{r}_i$ وموضع مركز الكتلة بالمتجه $\vec{r}_{c.m}$ كما في الشكل (٢.) لوجدنا أن :



الشكل (٢,٢): موضع الجسيم m_i.

$$\vec{r}_i = \vec{r}\,' + \vec{r}_{c.m} \qquad .....(2-14)$$

وبالاشتقاق نجد أن:

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}'_i + \vec{\upsilon}_{c.m} \qquad ......(2-15)$$

حيث أن $\vec{\upsilon}_{c.m}$ هي سرعة مركز الكتلة، بينما $\vec{\upsilon}'_i$ هي سرعة الجسيم m_i بالنسبة لمركز الكتلة. وباستخدام المعادلات (١٤- ٢) و (١٥- ٢) فان المعادلة (١٣- ٢) يمكن أن تكتب على النحو التالي :

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{\upsilon}'_i + \vec{\upsilon}_{c.m}\right) \cdot \left(\vec{\upsilon}'_i + \vec{\upsilon}_{c.m}\right)$$
$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_{c.m}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i'^2 + \sum_i m_i \left(\vec{\upsilon}'_i \cdot \vec{\upsilon}_{c.m}\right)$$

لكن:

$$\sum_i m_i \left(\vec{\upsilon}_i' \cdot \vec{\upsilon}_{c.m}\right) = 0 \qquad ....(2-16)$$

كما أن:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_{c.m}^2 = \frac{1}{2} \upsilon_{c.m}^2 \sum_i m_i$$
$$= \frac{1}{2} M \upsilon_{c.m}^2$$

حيث أن $M = \sum_i m_i$

وبذلك تصبح T على الشكل التالي :

$$T = \frac{1}{2} M \upsilon_{c.m}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i'^2 \qquad ......(2-17)$$

إذاً الطاقة الحركية لمنظومة من الجسيمات تساوي الطاقة الحركية الانتقالية لمركز الكتلة [الحد الأول من الطرف الأيمن للمعادلة (٢-١٧)] بالإضافة إلى مجموع الطاقات الحركية لجسيمات المنظومة بالنسبة لمركز الكتلة [الحد الثاني من الطرف الأيمن من المعادلة (٢-١٧)].

من جهة أخرى إذا كانت القوى المؤثرة على منظومة الجسيمات هي قوى محافظة، عندئذ يمكن إيجاد طاقة الوضع. فمثلا إذا كانت طاقة الوضع تعتمد على مواضع الجسيمات فقط فان:

$$U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n) \qquad .....(2-18)$$

عندئذ تكتب الطاقة الميكانيكية الكلية لمنظومة الجسيمات على النحو التالي:

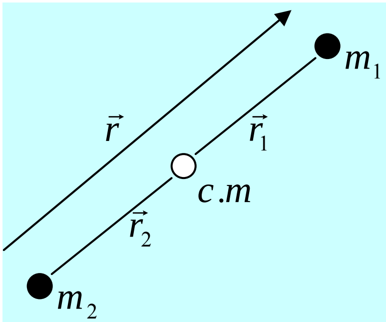
$$E = T + U = \frac{1}{2} M \upsilon_{c.m}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i'^2 + U \qquad .....(2-19)$$

(٢,٥) حر ك ة جسيمين يؤثران احدهم على الأخر- الـ ك تلة المصغرة

لنفرض حركة منظومة مكونة من جسمين (تعامل كجسيمين) يؤثر احدهما على الأخر بقوة مركزية. سنفرض أن المنظومة معزولة. إذن يتحرك مركز الكتلة بسرعة ثابتة. وللسهولة سنفرض أن مركز الكتلة يقع في نقطة الأصل. عندئذ نحصل على:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0 \qquad ....(2-20)$$

وكما هو موضح بالشكل(٣- ٢) فان المتجهات $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ تمثل مواقع الجسيمات m_1 و m_2 على التوالي بالنسبة لمركز الكتلة.



الشكل (٣- ٢) موضع الجسيم بالنسبة لمركز الكتلة.

فإذا كانت $\vec{r}$ تمثل موضع الجسيم m_1 بالنسبة للجسيم m_2، عندئذ :

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad ....(2-21)$$

وباستخدام المعادلة (٢٠- ٢) نجد أن:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1(1+\frac{m_1}{m_2}) \qquad .....(2-22)$$

إن المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم m_1 بالنسبة لمركز الكتلة هي :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \qquad .....(2-23)$$

حيث $f(r)$ تمثل مقدار القوة المتبادلة بين الجسمين. ومن المعادلة (٢٢-٢) يمكن أن نكتب:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \qquad ......(2-24)$$

حيث أن $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ وتسمى بالكتلة المصغرة.

المعادلة (٢٤- ٢) هي معادلة جديدة للحركة تعطي حركة الجسيم m_1 بالنسبة للجسيم m_2 وهذه المعادلة هي تماما نفس معادلة الحركة لجسيم منفرد كتلته μ يتحرك في مجال قوه مركزي تعطى من $f(r)$. وفي حالة جسيمين يجذب احدهما الأخر يكون:

$$f(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad ......(2-25)$$

وفي هذه الحالة تكون معادلة الحركة هي:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \qquad .....(2-26)$$

وهذه المعادلة تماثل معادلة جسيم منفرد في مجال التربيع العكسي المركزي. ونستنتج من ذلك أن كل جسيم يتحرك بقطع ناقص مركزي حول الآخر سوف يتخذ كل منهما الآخر كبؤرة له. فمثلا عند اعتبار الأرض والقمر منظومة معزولة فالقمر يتحرك بقطع ناقص بؤرته مركز الأرض، والأرض تتحرك بقطع ناقص بؤرته مركز القمر.

(٢,٦) التصادمات Collisions

تعتبر مسألة تصادم جسمين من أهم المسائل في الفيزياء، لأنها بسيطة الدراسة ولكنها غنية بما تعطيه من معلومات عن الأجسام المتصادمة وعن طبيعة التصادم.وتقسم التصادمات إلى:

١- التصادمات المرنة : وهي التصادمات التي تبقى فيها الطاقة الحركية الكلية للجسيمات المتصادمة قبل وبعد التصادم ثابتة لا تتغير.

٢- التصادمات غير المرنة : وهي تلك التي تختلف فيها الطاقة الحركية الكلية للجسيمات المتصادمة قبل التصادم عن الطاقة الحركية الكلية بعد التصادم.

(٢,٦,١) التصادمات المرنة

إذا كان لدينا جسيمان كتلتهما m_1 و m_2 وحدث بينهما تصادم بحيث أن زخمهما الخطي قبل التصادم هو $\vec{p}_1$ و $\vec{p}_2$ على الترتيب. وبعد التصادم $\vec{p}_1'$ و $\vec{p}_2'$ على الترتيب أيضاً. عندئذ وباستخدام مبدأ حفظ الزخم الخطي ومبدأ حفظ الطاقة الحركية في التصادمات المرنة، فإننا نكتب:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \qquad ......(2-27)$$

$$T_1 + T_2 = T_1' + T_2' \qquad .....(2-28)$$

والمعادلة (٢٨- ٢) يمكن أن تكتب على الشكل التالي:

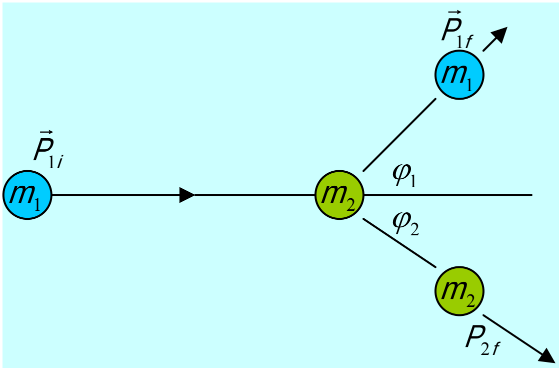
$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \qquad ......(2-29)$$

حيث استخدمنا العلاقة $T = \dfrac{p^2}{2m}$

من الواضح إن الشرط الأساس لتحقيق التصادم المرن هو أن تكون الطاقة الحركية وكمية الحركة محفوظتين.

حالات خاصة

إذا كان $(\upsilon_2 = 0)$ أي أن الجسيم m_2 ساكن قبل التصادم. عندئذ من المعادلات (٢٧- ٢) و (٢٩- ٢) ومن الشكل (٢- ٤) يمكن أن نكتب:



الشكل (٤- ٢) التصادم المرن بين الكتلتين m_1 و m_2.

$$\begin{aligned} p_{1i} &= p'_{1f}\ \cos\varphi_1 + p'_{2f}\ \cos\varphi_2 \\ 0 &= p'_{1f}\ \sin\varphi_1 - p'_{2f}\ \sin\varphi_2 \\ p_{1i}^2 &= p'^2_{1f} + \frac{m_1}{m_2} p'^2_{2f} \end{aligned}$$

وباختصار φ_2 من المعادلات السابقة نجد:

$$\frac{p'_{1f}}{p_{1i}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\varphi_1 \pm \sqrt{\left(\frac{m_1\cos\varphi_1}{m_1+m_2}\right)^2 + \left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)} \qquad .....(2-30)$$

فإذا كانت $m_1 > m_2$ نلاحظ أن المقدار $\sqrt{\left(\frac{m_1\cos\varphi_1}{m_1+m_2}\right)^2+\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)}$ سيصبح مساويا للصفر عندما $\varphi_1=\varphi_c$ حيث:

$$\left(\frac{m_1\cos\varphi_c}{m_1+m_2}\right)^2=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \qquad .....(2-31)$$

أي أن:

$$\frac{p'_{1f}}{p_{1i}}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\varphi_1\left[1\pm\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi_c}{\cos^2\varphi_1}}\right]$$

ومنه نلاحظ أن φ_1 لا يمكن أن تكون اكبر من φ_c لأنه إذا كان $\varphi_1>\varphi_c$ فان $\cos\varphi_1<\cos\varphi_c$ وهذا سيجعل المقدار الذي تحت الجذر سالبا. لذلك نستنتج بأنه عندما يصطدم جسم ثقيل m_1 بجسم اخف منه m_2 فإنه لا يمكن أن يتشتت عن مساره بزاوية أكبر من φ_c المعطاة في المعادلة (٣١- ٢).

أما إذا كانت $m_1=m_2$ فإنه يكون:

$$p'_1=p_1\cos\varphi_1$$
$$p'_2=p_2\sin\varphi_1$$

ومن الواضح أن φ_1 تتغير من $\varphi_1=0$ إلى $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$.

أما إذا كانت $m_1<m_2$ فإنه في هذه الحالة يمكن أن تأخذ φ_1 كل القيم من $\varphi_1=0$ إلى $\varphi_1=\pi$ (أي ارتداد خلفي أو تشتت) وفي هذه الحالة يكون:

$$p_1' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} p_1$$
$$p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \qquad ....(2-32)$$

(٢,٦,٢) التصادمات غير المرنة

تقسم التصادمات غير المرنة إلى قسمين:

أ) التصادمات غير المرنة كليا ، وفيها تلتصق الجسيمات المتصادمة ببعضها نتيجة للتصادم وتصبح جسما واحداً.

ب) التصادمات غير المرنة جزئيا ، وفيها تبقى الجسيمات المتصادمة منفصلة عن بعضها وان اختلفت كتلتها نتيجة للتصادم. وفي كلتا الحالتين فإننا نكتب من مبدأ حفظ الزخم والطاقة:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

وكذلك:

$$(T_1 + T_2) - (T_1' + T_2') = Q \qquad ......(2-33)$$

حيث تدل Q على الفرق في الطاقة الكلية للأجسام قبل التصادم وبعده. فإذا كانت $(Q > 0)$ فان بعض الطاقة تتحرر نتيجة التصادم ونقول أن التصادم مصدر للطاقة(Exoergic). أما إذا كانت $(Q < 0)$ فان التصادم بحاجة لبعض الطاقة حتى يتم ونقول أن التصادم ماص للطاقة(Endoergic). وبالطبع إذا كانت $(Q = 0)$ فان التصادم يكون مرنا.

(٢,٦,٢,١) التصادمات غير المرنة كليا

سندرس حالة تصادم جسم m_1 يسير بسرعة $\vec{\upsilon}_o$ مع جسم ثانٍ ساكن $(\vec{\upsilon}_{2i} = 0)$ بحيث يلتصق به بعد التصادم، من مبدأ حفظ الزخم:

$$m_1\vec{\upsilon}_o = (m_1 + m_2)\,\vec{\upsilon} \qquad ......(2-34)$$

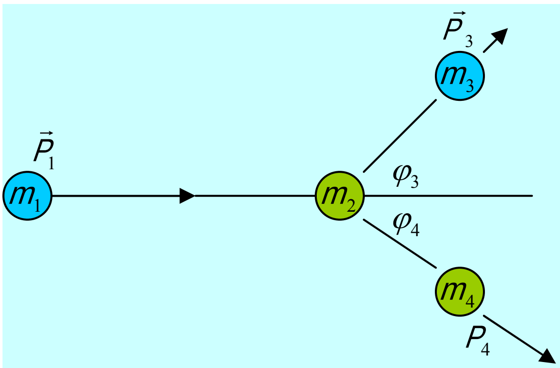
حيث تدل $\vec{\upsilon}$ على سرعة الجسمين بعد التصاقهما ببعضهما.

ويمكن البرهنة على أن الطاقة لا تبقى محفوظة بل يضيع جزء منها وتعطى بالعلاقة :

$$Q = \frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

(٢,٦,٢,٢) التصادمات غير المرنة جزئيا

لنعتبر جسم كتلته m_1 وزخمه الخطي $\vec{p}_1$ اصطدم بجسم آخر كتلته m_2 وساكن بحيث يؤول التصادم إلى إنتاج جسمين جديدين كتلتيهما m_3 و m_4. كما هو موضح بالشكل (٥- ٢). عندئذ نكتب من مبدأي حفظ الزخم والطاقة:



الشكل (٥- ٢) التصادم غير المرن جزئيا بين كتلتين.

$$p_1 = p_3 \cos\varphi_3 + p_4 \cos\varphi_4$$
$$0 = p_3 \sin\varphi_3 - p_4 \sin\varphi_4$$

$$T_1 - (T_3 + T_4) = Q$$

وباختصار φ_4 من المعادلتين الأوليتين نجد أن:

$$p_4^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos\varphi_3$$

وبما أن: $T = \dfrac{p^2}{2m}$

عندئذ نحصل على قيمة الطاقة الضائعة (او المكتسبة) Q :

$$Q = T_1(1 - \frac{m_1}{m_2}) - T_3(1 + \frac{m_3}{m_4}) + 2(\frac{m_1 m_3 T_1 T_3}{m_4^2})^{\frac{1}{2}} \cos\varphi_3 \qquad ....(2-35)$$

وتستعمل العلاقة (٣٥- ٢) في الفيزياء النووية لمعرفة القيمة Q (Q-Value) الناتجة من أي تفاعل نووي. منها نجد أن الطاقة الحركية الكلية تكون غير محفوظة إذ أنه يتم فقد جزء منها في حالة التصادم غير المرن أما في حالة التصادم غير المرن كليا فان الجسيمين يلتصقان ويتوقفان عن الحركة وتتحول الطاقة الحركية بكاملها إلى شكل آخر من أشكال الطاقة.

(٢,٧) معامل الارتداد

عندما يصطدم جسمان ببعضهما اصطداما رأسيا فان هناك علاقة تربط بين سرعتهما النسبية قبل التصادم وبعدة. إذ وجد تجريبيا أن:

$$e = \frac{|\upsilon_2' - \upsilon_1'|}{|\upsilon_2 - \upsilon_1|} = \frac{\upsilon'}{\upsilon} = \frac{\text{سرعة التباعد}}{\text{سرعة التقارب}} \qquad .....(2-36)$$

حيث تدل e على معامل الارتداد وتتراوح قيمته بين $e=0$ من اجل اصطدام غير مرن كليا و $e=1$ من اجل اصطدام مرن تماما. ويمكن استخدام العلاقة (٣٦- ٢) بالإضافة إلى مبدأي حفظ الزخم والطاقة في هذه الحالة لدراسة حادثة تصادم جسمين بشكل رأسي على خط مستقيم.

(٢,٨) مسألة الجسمين Two-Body Problem

سنعتبر في هذه الفقرة حركة منظومة مؤلفة من جسمين m_1 و m_2 يؤثران على بعضهما بقوتين خاضعتين لقانون نيوتن الثالث فقط.

ليكن موضع الجسمين هما $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ عندئذ نكتب من قانون نيوتن الثاني :

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{1i} + \vec{F}_{1e}$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{2i} + \vec{F}_{2e} \qquad ......(2-37)$$

حيث تشير $\vec{F}_{1i}$ أو $\vec{F}_{2i}$ إلى القوة الداخلية المؤثرة على الجسيم m_1 أو m_2 على الترتيب.

وحسب قانون نيوتن الثالث:

$$\vec{F}_{1i} = -\vec{F}_{2i} \qquad ....(2-38)$$

أما $\vec{F}_{1e}$ و $\vec{F}_{2e}$ فهما القوتان الخارجيتان المؤثرتان على الجسيم m_1 و m_2 على الترتيب. واللتين نفترض أنهما تحققان العلاقة:

$$\frac{\vec{F}_{1e}}{m_1} = \frac{\vec{F}_{2e}}{m_2} \qquad .....(2-39)$$

أما مركز كتلة الجسيمين فيعرف بأنه الموضع المتوسط لكتلة النظام ورياضيا يمكن تعريف مركز الكتلة بالمعادلة الآتية:

$$\vec{r}_{c.m} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad ......(2-40)$$

كما تعرف المسافة النسبية بين الجسمين بالعلاقة :

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad .....(2-41)$$

عندئذ من العلاقتين (٤٠- ٢) و (٤١- ٢) يمكن كتابة :

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{c.m} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \qquad .....(2-42)$$

وكذلك :

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{c.m} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \qquad ....(2-43)$$

وبتعويض $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ في المعادلة (٣٧- ٢) وجمعهما نجد أن :

$$(m_1 + m_2)\ddot{\vec{r}}_{c.m} = \vec{F}_{1e} + \vec{F}_{2e} \qquad .....(2-44)$$

من ناحية أخرى نضرب أولى المعادلتين (٣٧- ٢) ب m_2 والثانية ب m_1 ونطرح فنجد :

$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} = (m_1 + m_2)\vec{F}_{1i} \qquad .....(2-45)$$

وبفرض أن $M = m_1 + m_2$ و $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ نجد أن المعادلتين (٤٤- ٢) و (٤٥- ٢) قد أصبحتا على الشكل التالي:

$$M\,\ddot{\vec{r}}_{c.m} = \vec{F} \qquad ......(2-46)$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{1i} \qquad ......(2-47)$$

حيث تدل $\vec{F}$ على القوة الخارجية الكلية $\vec{F} = \vec{F}_{1e} + \vec{F}_{2e}$.

وتعطي المعادلة (٤٦- ٢) معادلة حركة مركز الكتلة وكأنة جسيم كتلته الكلية هي M وخاضع للقوة الخارجية الكلية $\vec{F}$. بينما تعطي المعادلة (٤٧- ٢) حركة جسيم كتلته μ وموجود في موضع الجسيم m_1 بالنسبة للجسيم m_2 وخاضع للقوة $\vec{F}_{1i}$ التي يؤثر بها الجسيم m_2 على الجسيم m_1.

ويمكن استعمال المعادلتين (٤٢- ٢) و (٤٣- ٢) لإيجاد سرعة الجسيمين $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ وبالتالي الطاقة الحركية الكلية، ويكون :

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 \qquad ....(2-48)$$

حيث $\vec{V} = \dot{\vec{r}}_{c.m}$ وكذلك $\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}}$.

(٢,٩) مسائل

السؤال الأول:

حدد موضع مركز كتلة الكتل الثلاث الموضوعة على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع والذي طول ضلعه $(10cm)$ حيث $m_3 = 3kg \quad , \quad m_2 = 2kg \quad , \quad m_1 = 1kg$.

السؤال الثاني:

اوجد موضع مركز كتلة الجسيمين $m_1 = 2kg \;,\; m_2 = 4kg$ اللذين يبعدان عن بعضهما مسافة $(3m)$.

السؤال الثالث :

احسب مقدار الطاقة الضائعة (أو المكتسبة) (Q) في حالة تصادم رأسي بين جسيم m_1 وسرعته v_1 بجسيم آخر كتلته m_2 ساكن، مع العلم بان معامل الارتداد هو (e).

السؤال الرابع :

برهن أن معامل الارتداد (e) يساوي الواحد في حالة التصادمات المرنة.

السؤال الخامس:

أيـن يقـع مركـز كتلـة الأرض والقمـر بفـرض أن كتلـة الأرض (m_e) تـساوي ثمـانين ضـعفا مـن كتلـة القمـر (m_m) وان المـسافة بـين مركـز الأرض ومركز القمر هي ٣٨٤ مليـون متر تقريبا ؟ كيـف يتحـرك مركـز الكتلة إذا أهملنا جاذبية الشمس والكواكب الأخرى.

(٢,١٠) المراجع

1-S.Thornton and J. Marion, "Classical Dynamics", 4th ed., Thomson Books, 2004.

2- Marion, J.B. vand Thornton, S.T., "Classical Dynamics of Particles and System",3rd ed., Acadimic Press,1988.

3- Snow, T.P., "The Dynamic Universe", West Publishing,1991.

4- H.Goldstein, "Classical Mechanics", 2nd ed., Addison-Wesley, 1992.

5- Fowles, G.R. and Cassiday, G.L., "A Addison-Wesley nalytical Mechanics", 5th ed., Saunders College Publishing,1993.

الحركة المستوية للأجسام الصلبة

• المقدمة • مركز الكتلة للأجسام الصلبة • نظريتا بابس • دوران الجسم الصلب حول محور ثابت عزم القصور الذاتي • حساب عزم القصور الذاتي • نظريات أساسية لحساب عزم القصور الذاتي • البندول البسيط • البندول المركب • الحركة العامة للأجسام الصلبة • جسم صلب مستدير يتدحرج على مستوى مائل • جسم صلب مستدير يتدحرج على سطح مستوى مائل • مسائل

(٣,١) المقدمة

في هذا الفصل سندرس حركة الأجسام الصلبة المؤلفة من عدد كبير من الجسيمات، ولذلك سنقسم حركة الجسم إلى جزأين: انتقال لمركز الكتلة ودوران للجسم ككل حول محور مار من مركز الكتلة. وسنستخدم قانون نيوتن الثاني $\vec{F} = m\vec{a}$ لدراسة حركة مركز الكتلة. كما سنستخدم الشكل الدوراني لهذا القانون $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ ، حيث $\vec{\tau}$ عزم القوى الخارجية المؤثرة على الجسم حول محور الدوران و I عزم القصور الذاتي للجسم حول نفس المحور. أما $\vec{\alpha}$ فهي التسارع الزاوي للجسم في حركته الدورانية.

(٣,٢) مركز الكتلة لجسم صلب

سبق أن عرفنا بالفصل الثاني موضع مركز الكتلة لعدة جسيمات بالعلاقة:

$$\vec{r}_{c.m} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \qquad ......(3-1)$$

حيث:

$\vec{r}_i$: متجه موضع الكتلة m_i.

M : الكتلة الكلية للجسيمات.

ويمكن تحويل العلاقة (١- ٣) لا يجاد موضع مركز كتلة جسم صلب بتجزئته إلى عدد كبير جدا من العناصر الجسيمية $m_i = dm$ التي نحدد موضع كل منها بالمتجه $\vec{r}$. وعندئذ ينتهي المجموع في المعادلة (١-٣) إلى تكامل على الشكل:

$$\vec{r}_{c.m} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \qquad ......(3-2)$$

وبتعريف كثافة أية مادة بالعلاقة :

$$\rho = \frac{dm}{dv} \qquad ....(3-3)$$

حيث dv العنصر الحجمي للكتلة dm.

إذاً المعادلة (٢- ٣) يمكن أن تكتب بالصورة

$$\vec{r}_{c.m} = \frac{1}{M}\int_v \rho\, \vec{r}\, dv \qquad .....(3-4)$$

حيث يدل v على حجم الجسم الصلب كله.

ولا بأس من أن نشير هنا إلى أنه لو كان الجسم الصلب على شكل توزيع سطحي بدلا من حجمي، لأصبحت العلاقة (٤- ٣) على النحو التالي:

$$\vec{r}_{c.m} = \frac{1}{M}\int_{s} \sigma\, \vec{r} ds \qquad ....(3-5)$$

حيث σ : الكثافة السطحية للجسم.

s : مساحة الجسم.

وبالطريقة نفسها لو كان الجسم متوزع بشكل طولي لأصبحت العلاقة (٤- ٣) على الشكل التالي :

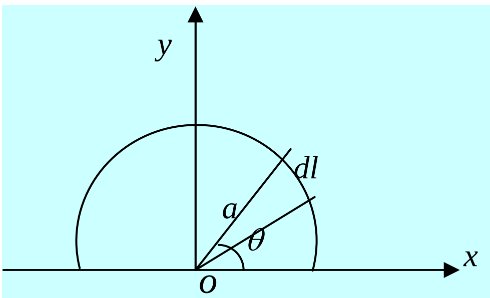
$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int_{l} \lambda\, \vec{r} dl \qquad .....(3-6)$$

حيث λ : الكثافة الطولية للجسم.

l : طول الجسم.

مثال (١-٣): مركز كتلة سلك على شكل نصف دائرة

لنعتبر سلكا على شكل نصف دائرة نصف قطرها a كما في الشكل (٣- ١)، ولنحسب موضع مركز كتلته.



الشكل (٣- ١) سلك على شكل نصف دائرة.

السلك يقع في المستوى xy ولذلك نكتب من العلاقة (٦- ٣):

$$X = \frac{1}{M}\int \lambda\, x dl$$

$$Y = \frac{1}{M}\int \lambda\, y dl$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية (r,θ) نكتب :

$$x = a\cos\theta$$
$$y = a\sin\theta$$

كما نلاحظ من الشكل أن $dl = ad\theta$ ولذلك يكون :

$$X = \frac{1}{M}\int_0^\pi \lambda\left(a\cos\theta\right)\left(ad\theta\right) = 0$$

$$Y = \frac{1}{M}\int_0^\pi \lambda\left(a\sin\theta\right)\left(ad\theta\right) = \frac{2\lambda a^2}{M}$$

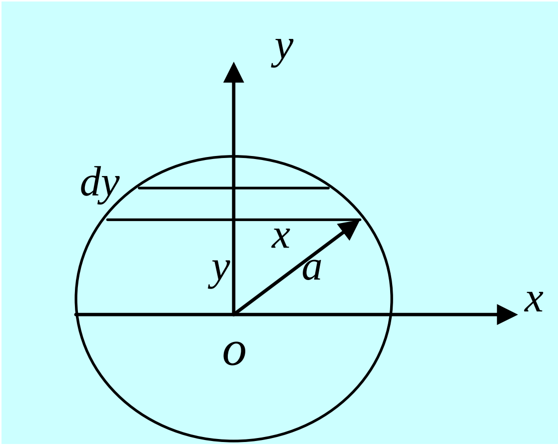
ولكن كتلة السلك هي $M = \frac{2\pi a}{2}\lambda$. ولذلك يكون :

$$Y = \frac{2a}{\pi}$$

إذاً موضع مركز الكتلة يقع على محور الصادات oy ، وهذا متوقع من تناظر السلك بالنسبة لهذا المحور.

مثال (٣-٢): مركز كتلة نصف قرص متجانس

لحساب موضع مركز كتلة نصف قرص متجانس، اعتبر شريحة طولها $2x$ وعرضها dy كما في الشكل(٣- ٢).



الشكل (٣- ٢) نصف قرص متجانس.

وباستخدام المعادلة (٥- ٣) يكون :

$$X = \frac{1}{M}\int \sigma x ds$$
$$Y = \frac{1}{M}\int \sigma y ds$$

حيث يعطى العنصر السطحي ds بالعلاقة :

$$ds = 2xdy$$

وكذلك $x^2 + y^2 = a^2$ فيكون $y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ وكذلك

$$dy = -\frac{xdx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ولهذا نجد أن:

$$X = \frac{1}{M}\int_{a}^{0}\left[\sigma(x)(2x)(-\frac{xdx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}})\right] = 0$$

$$Y = \frac{1}{M}\int_{a}^{0}\left[\sigma(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}(2x)(\frac{-xdx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$Y = \frac{2\sigma a^3}{3M}$$

وبما أن كتلة نصف القرص هي:

$$M = (\frac{1}{2}\pi a^2)\sigma$$

$$\therefore \quad Y = \frac{4a}{3\pi}$$

في هذه الحالة أيضاً يقع مركز الكتلة على oy بسبب التناظر.

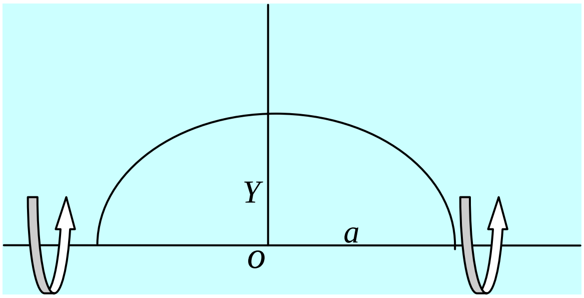
(٣,٣) نظريتا بابس Pappus Theorems

يمكن في كثير من الأحيان اختصار العمليات الرياضية اللازمة لحساب موضع مركز كتلة جسم صلب متجانس، موزع بشكل طولي أو سطحي، باستخدام نظريتي بابس اللتين يمكن تلخيصهما كما يلي:

١- نظرية بابس الأولى

"المساحة الناتجة عن دوران منحنى مستو حول محور لا يتقاطع معه تساوي طول المنحني مضروبا بالمسافة التي يقطعها مركز الكتلة خلال الدوران".

وكتطبيق لنظرية بابس الأولى نعود إلى حساب موضع مركز كتلة سلك منحني على شكل نصف دائرة كما في الشكل (٣- ٣)، فنلاحظ أن المساحة التي يدورها المنحني عند دورانه حول المحور AB هي مساحة سطح كرة نصف قطرها a.



الشكل (٣- ٣) منحنى على شكل نصف دائرة.

ولذلك نكتب :

$$s = 4\pi a^2$$

وبحسب نظرية بابس الأولى وملاحظة أن مركز الكتلة يقع على المحور oy بسبب التناظر، نكتب :

$$4\pi a^2 = (\pi a)(2\pi Y)$$

حيث ترمز Y إلى موضع مركز الكتلة على oy، ونجد :

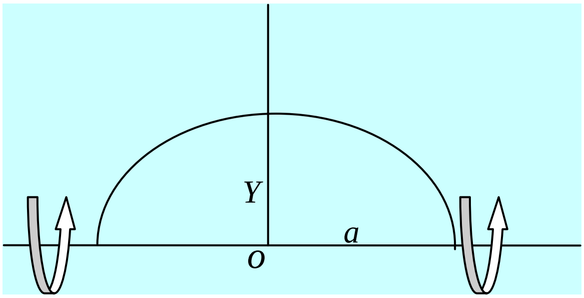
$$Y = \frac{2a}{\pi}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في المثال السابق بواسطة لتكامل.

٢- نظرية بابس الثانية

"الحجم الناتج عن دوران قطعة مستوية حول محور في مستويها ولا يتقاطع معها إلا عند طرفها تساوي مساحة القطعة مضروبة بالمسافة التي يقطعها مركز الكتلة خلال الدوران ".

وسنطبق هذه النظرية على نصف قرص متجانس، بتدوير القرص حول المحور AB ، كما في الشكل (٣- ٤).



الشكل (٣- ٤) يمثل نصف قرص متجانس.

نلاحظ أن الحجم الناتج هو كرة، أي أن: $V = \frac{4}{3}\pi a^3$، وبحسب التناظر فان مركز الكتلة Y يقع على oy ، ولذلك نكتب :

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \left(\frac{1}{2}\pi a^2\right)(2\pi Y)$$

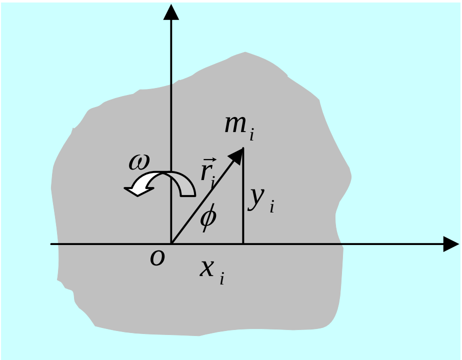
حيث $\frac{1}{2}\pi a^2$ مساحة نصف القرص طبعا. وبالتالي نجد :

$$Y = \frac{4a}{3\pi}$$

وهي نفس النتيجة التي وجدناها سابقا.

(٣,٤) دوران الجسم الصلب حول محور ثابت - عزم القصور الذاتي

من أبسط حركات الجسم الصلب، عدا حركته الانتقالية الصرفة، حركته الدورانية المقيدة حول محور ثابت. باختيار المحور z في محاور مناسبة كمحور للدوران. فمسار الجسيم m_i الذي موضعه النقطة (x_i, y_i, z_i) عندئذ يكون دائرة نصف قطرها $r_i = (x_i^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}}$ ومركزها يقع على المحور z ويمثل الشكل (٣- ٥) مقطعا عرضيا للحركة موازيا للمستوى xy.



الشكل (٣- ٥) مقطعا عرضيا للحركة موازيا للمستوى xy

سرعة الجسيم m_i هي :

$$v_i = r_i \omega = (x_i^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}} \omega \qquad (3-7)$$

حيث ω السرعة الزاوية للدوران.

من الشكل نجد أن للسرعة المركبات التالية:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= -v_i \sin\phi = -\omega y_i\\ \dot{y}_i &= v_i \cos\phi = \omega x_i\\ \dot{z}_i &= 0 \qquad\qquad .....(3-8)\end{aligned}$$

المعادلات السابقة يمكن الحصول عليها بإيجاد المركبات للمعادلة التالية:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_i$$

حيث $\vec{\omega} = \hat{k}\,\omega$

لنحسب الآن الزخم الزاوي حول محور الدوران. لما كان الزخم الزاوي لمجموعة الجسيمات التي يتكون منها الجسم يساوي $\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ عندئذ مركبة الزخم الزاوي L_z هي :

$$\begin{aligned}L_z &= \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i)\\ L_z &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)\,\omega\\ L_z &= \sum m_i r_i^2 \omega \qquad\qquad .....(3-9)\end{aligned}$$

حيث استخدمنا المعادلات (٨- ٣)، لكن

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \qquad ....(3-10)$$

$$\therefore\quad L_z = I_z\,\omega \qquad\qquad .....(3-11)$$

ويطلق على I_z اسم عزم القصور الذاتي (Moment of Inertia) حول المحور z. وتعتمد قيمته، كما نلاحظ من المعادلة (١٠- ٣) على المحور الذي يدور حوله الجسم، وهذا هو الفرق الأساسي بين I و m. وإذا عوضنا عن L_z في المعادلة $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ لوجدنا أن:

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt}$$

أي أن:

$$\tau_z = I_z \alpha \qquad .....(3-12)$$

لنحسب الآن الطاقة الحركية للجسم خلال دورانه حول oz ، فيكون :

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(r_i^2 \dot{\theta}_i^2 \right)$$
$$= \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2)\, \omega^2$$

ومنه :

$$T = \frac{1}{2} I_z \, \omega^2 \qquad ....(3-13)$$

أخيراً ، نلخص فيما يلي معادلات الحركة والتحريك الانتقالي والدوراني لجسم صلب للمقارنة بينهما وملاحظة التناظر التام في هذه المعادلات باستبدال I بـ m والمتحولات الدورانية بالمتحولات الانتقالية كما في الجدول (٣- ١).

الجدول (٣- ١) العلاقة بين متغيرات الحركة الدورانية والحركة الانتقالية.

الحركة الدورانية	الحركة الانتقالية
الموضع الزاوي θ	الموضع x
السرعة الزاوية $\omega = \dot{\theta}$	السرعة الخطية $v = \dot{x}$
التسارع الزاوي $\alpha = \ddot{\theta}$	التسارع الخطي $a = \ddot{x}$
العزم $\tau = I\alpha$	القوة $F = ma$
عزم القصور الذاتي $I = \sum m_i r_i^2$	الكتلة m
طاقة الوضع $U(\theta) = -\int \tau \, d\theta$	طاقة الوضع $U(x) = -\int F dx$
الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2} I \omega^2$	الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2} m v^2$
الزخم الزاوي $L = I\omega$	الزخم الخطي $P = mv$

كما يمكن مقارنة معادلات الحركة الخطية مع معادلات الحركة الدورانية كما في الجدول (٣- ٢) التالي :

الجدول(٣- ٢) مقارنة بين متغيرات الحركة الخطية والحركة الدورانية.

معادلات الحركة الدورانية	معادلات الحركة الخطية
$\theta = \theta_o + \frac{1}{2}(\omega_o + \omega)$ $\omega = \omega_o + \alpha t$ $\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha(\theta - \theta_o)$	$x = x_o + \frac{1}{2}(v_o + v)t$ $v = v_o + at$ $x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o)$

(٣,٥) حساب عزم القصور الذاتي

يمكن حساب عزم القصور الذاتي I لجسم صلب حول محور ما بتجزئته إلى جسيمات متناهية في الصغر بحيث تصبح كل كتلة m_i عنصر كتلة dm بعدها عن محور الدوران r ، كما ينتهي عدد هذه الجسيمات إلى ما لانهاية وعندئذ ينتهي المجموع في المعادلة (١٠- ٣) إلى تكامل.

$$I_z = \int r^2 dm \qquad ......(3-14)$$

حيث يمتد التكامل على الجسم الصلب كله.

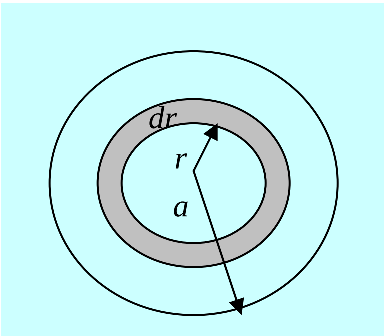
وبالتعويض عن dm من العلاقة $dm = \rho dv$ في التكامل أعلاه، نجد:

$$I_z = \int_v \rho r^2 dv \qquad ......(3-15)$$

ومن الواضح أنه إذا كان توزيع الجسم سطحيا أو طوليا فان dv في التكامل السابق تصبح عنصرا سطحيا ds أو عنصرا طوليا dl ، على الترتيب.

مثال (٣-٣) : عزم القصور الذاتي لقرص متجانس حول محور عمودي يمر عند المركز

لحساب عزم القصور الذاتي لقرص متجانس حول محور عمودي علية عند مركزه نختار عنصر الكتلة dm مؤلفة من حلقة نصف قطرها r وسمكها dr ، كما في الشكل (٣- ٦)،(بحيث تبعد جميع نقاطها عن محور الدوران نفس البعد).



الشكل (٣- ٦) يمثل حلقة نصف قطرها r وسمكها dr.

ولذلك :

$$dI = r^2 dm$$

ولكن :

$$dm = \sigma ds = \sigma(2\pi r dr)$$

ولهذا تكون :

$$I = \int_0^a \sigma r^2 (2\pi r dr) = \frac{2\pi\sigma a^4}{4}$$

$$I = \frac{1}{2} m a^2$$

حيث وضعنا :

$$m = \sigma(\pi a^2)$$

ونلاحظ أن أبعاد عزم القصور الذاتي هي كتلة مضروبة في مربع مسافة، ولذلك يعبر عن عزم القصور الذاتي لأي جسم صلب حول محور بالشكل التالي :

$$I_z = M k_z^2 \qquad .....(3-16)$$

حيث تدل k_z على طول يطلق علية اسم نصف قطر الدوران (Radius of Gyration) ويمثل البعد الذي لو كان كل الجسم مجمعا عنده لكان عزم قصوره الذاتي حول المحور المفترض هو I_z.

(٣,٦) نظريات أساسية لحساب عزم القصور الذاتي لجسم صلب حول محور

(٣,٦,١) نظرية المحاور المتوازية **Parallel Axes Theorem**

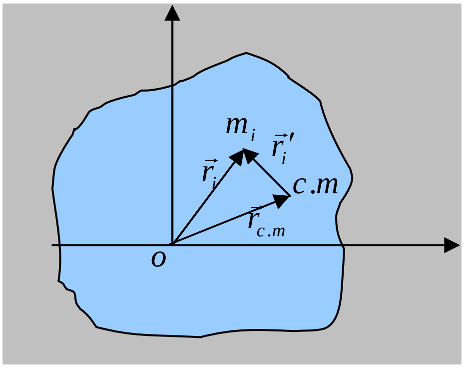
أن عزم القصور الذاتي لجسم صلب حول محور ما يساوي مجموع عزم قصوره الذاتي حول محور مار من مركز كتلته و مواز للمحور المفروض مع حاصل ضرب كتلته بمربع البعد بين المحورين.

البرهان:

بحسب تعريف عزم القصور الذاتي حول المحور oz المار من 0.

$$I_o = \sum m_i r_i^2$$

ولكن من الشكل (٣- ٧) والذي يوضح تفسيرا لنظرية العزوم لأجسام مركز ثقلها $m_{c.m}$.



الشكل (٣- ٧) مركز الكتلة للجسيم m_i.

$$r_i^2 = r_{c.m}^2 + r_i'^2 + 2\vec{r}_i' \cdot \vec{r}_{c.m}$$

حيث تدل $\vec{r}_i'$ على المتجه من مركز الكتلة $m_{c.m}$ إلى موضع الجسيم m_i.

ولذلك فان :

$$I_o = \sum m_i r_{c.m}^2 + \sum m_i r_i'^2 + 2\sum m_i \vec{r}_i' \cdot \vec{r}_{c.m}$$

$$I_o = M\ r_{c.m}^2 + I_{c.m} + 2\vec{r}_{c.m} \cdot \sum m_i\ \vec{r}_i'$$

ولكن وبحسب تعريف مركز الكتلة فان المجموع $\sum m_i \vec{r}_i'$ يمثل موضع مركز الكتلة للكتل m_i بالنسبة للنقطة $c.m$ في الشكل أعلاه وهذا بالطبع يساوي الصفر، أي أن:

$$\sum m_i\ \vec{r}_i' = 0$$

ولذلك يكون :

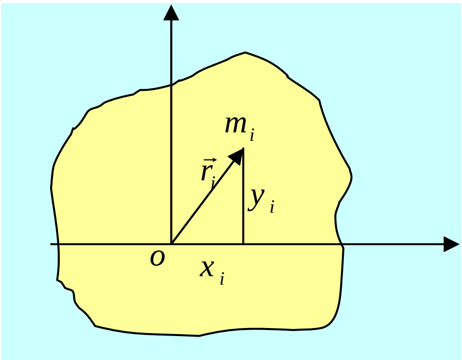
$$I_o = I_{c.m} + M\ r_{c.m}^2 \qquad ....(3-17)$$

(٣,٦,٢) نظرية المحاور المتعامدة Perpendicular Axes Theorem

"أن عزم القصور الذاتي لأي جسم صلب مسطح في مستوى واحد حول محور عمودي على سطحه يساوي حاصل جمع عزم قصوره الذاتي حول أي محورين متعامدين ومتقاطعين مع المحور المفروض وواقعين في مستوى الجسم الصلب ".

البرهان:

اعتبر الجسم الصلب المسطح الموضح في الشكل (٣- ٨) ولنحسب عزم قصوره الذاتي حول المحور oz العمودي على الورقة.



الشكل (٣- ٨) جسم صلب مسطح.

ولذلك يكون:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum m_i r_i^2 \\ &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ &= \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 \end{aligned}$$

ولكن :

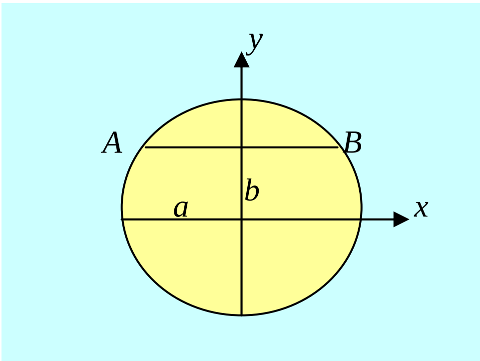
$$\sum m_i x_i^2 = I_x \quad , \quad \sum m_i y_i^2 = I_y$$

فيكون :

$$I_z = I_x + I_y \qquad ......(3-18)$$

مثال (٣-٤) :

ما عزم القصور الذاتي للقرص المتجانس المبين في الشكل (٣- ٩) حول المحور AB ؟



الشكل (٣- ٩) قرص متجانس.

يحل هذا المثال باستخدام نظرية المحاور المتوازية ونظرية المحاور المتعامدة. فإذا عرفنا عزم القصور الذاتي للقرص حول المحور x كما في الشكل (٣- ٩). عندئذ نستعمل نظرية المحاور المتوازية لمعرفة I_{AB}. ولكن حساب I_x التكامل معقد نوعا ما. لذلك سوف نستخدم نظرية المحاور المتعامدة، ونكتب: $I_z = I_x + I_y$.

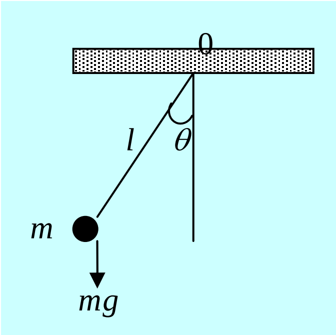
وبحسب المثال (٣- ٣) فإن $I_z = \frac{1}{2}ma^2$ كما أن $I_x = I_y$ (من التناظر!)، ولذلك $I_x = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{4}ma^2$

ومن ثم:

$$I_{AB} = I_x + mb^2 = \frac{1}{4}ma^2 + mb^2$$

(٣,٧) البندول البسيط Simple Pendulum

يتألف البندول البسيط من جسيم كتلته m يرتبط بخيط طوله l ومعلق من نقطة ثابتة 0 ، كما هو موضح بالشكل (٣- ١٠).



الشكل (٣- ١٠) البندول البسيط.

ولدراسة حركة البندول نستعمل العلاقة:

$$\tau = \frac{dL}{dr} = I\ddot{\theta}$$

حيث ترمز τ إلى عزم القوة الخارجية mg حول المحور oz (المار من 0 عموديا على الورقة) ويساوي:

$$\tau = -mg\,l\sin\theta \qquad .....(3-19)$$

وعزم القصور الذاتي حول المحور oz فهو:

$$I_z = m l^2$$

وبالتالي تصبح معادلة الحركة :

$$-mg\,l \sin\theta = m l^2 \ddot{\theta}$$

ومنه:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\right)\sin\theta = 0 \qquad ....(3-20)$$

الآن اعتبر الحالتين التاليتين:

أ) عندما تكون الزاوية θ صغيرة جدا.

في هذه الحالة $\sin\theta \approx \theta$ وبالتالي تصبح العلاقة (٢٠-٣) على الشكل:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \qquad .....(3-21)$$

حيث تدل $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ على السرعة الزاوية للكتلة m. وحل المعادلة (٢١-٣) هو:

$$\theta = \theta_o \cos(\omega t + \phi) \qquad (3-22)$$

ب) عندما تكون الزاوية θ غير صغيرة.

يمكن دراسة الحركة في هذه الحالة بشكل وصفي بواسطة الطاقة الكلية. أي أن:

$$E = T + U$$

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \qquad .....(3-23)$$

$$U = -mg\, l \cos\theta \qquad .....(3-24)$$

(على اعتبار أن طاقة الوضع تساوي الصفر عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$)، عندئذ يكون:

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mg\, l \cos\theta \qquad ....(3-25)$$

ومنها:

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 = E + mg\, l \cos\theta \qquad ......(3-26)$$

ونلاحظ أن طاقة الوضع ($mg\, l \cos\theta$) محدودة بين $mg\, l$ و $-mg\, l$ ولذلك فان الحركة ستكون اهتزازية طالما أن $mg\, l > E > -mg\, l$ وعندما $E = \pm mg\, l$ فان $\dot{\theta} = 0$ ويعود الجسم بالاتجاه المعاكس عند هذه النقطة. أما إذا كان $E > mg\, l$ فالحركة لن تكون اهتزازية لان $\dot{\theta}$ لا يمكن أن تصبح مساوية للصفر أبداً. أي أن البندول لا يهتز بل يدور في دائرة طوال الوقت. وبالطبع لا يمكن للطاقة E أن تكون اقل من $-mg\, l$ لأن $\dot{\theta}^2$ ستكون سالبة عندئذ.

الآن بعد وصف طبيعة الحركة بحسب طاقة الجسم الكلية E فان حل معادلة الحركة باستخدام معادلة الطاقة (٢٥- ٣) ويكون:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m l^2} + \frac{2g}{l}\cos\theta} \qquad .....(3-27)$$

أو

$$\int_{\theta_o}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{mgl} + \cos\theta}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\, t \qquad .....(3-28)$$

ويمكـن تحويـل التكامـل الأخـير إلى تكامـل معـروف بـإجراء بعـض التحويلات الرياضية على افتراض أن:

$$E = -mg\,l\cos\alpha \qquad ......(3-29)$$

وكذلك:

$$\sin\varphi = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad ......(3-30)$$

وبالتعويض في التكامل السابق (٢٨-٣) يكون:

$$\int_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \qquad ......(3-31)$$

حيث تم استخدام:

$$a = \sin\frac{\alpha}{2} \qquad ......(3-32)$$

وكذلك $\theta_o = 0$ للسهولة.

يسمى التكامل (٣١-٣) تكاملا قطعيا (Elliptic Integral) ويمكن نشره (شريطة أن تكون a صغيرة) على شكل سلسلة قوى فيكون:

$$\int_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} \approx \int_{0}^{\varphi} \left[1+\frac{1}{2}a^2\sin^2\varphi + ...\right] d\varphi = \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \qquad ....(3-33)$$

وبإجراء التكامل يكون:

$$\varphi+\frac{a^2}{8}(2\varphi-\sin 2\varphi)+........=\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \qquad .....(3-34)$$

وبما أن الزمن الدوري T للحركة هو الزمن اللازم ليقوم الجسم بدورة كاملة، أي عندما تتغير φ من الصفر إلى 2π ، عندئذ يكون:

$$2\pi+\frac{a^2}{8}(4\pi-\sin 4\pi)+.....=\sqrt{\frac{g}{l}}\,T \qquad .....(3-35)$$

إذاً الزمن الدوري T يكون :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,(1+\frac{a^2}{4}+........) \qquad .....(3-36)$$

يمكن ملاحظة أنه إذاً كانت a صغيرة بحيث يمكن إهمال الحدود التي تحتوي على a^2 أو أكبر عندئذ نحصل على العلاقة المعروفة للاهتزازات الصغيرة وهي:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

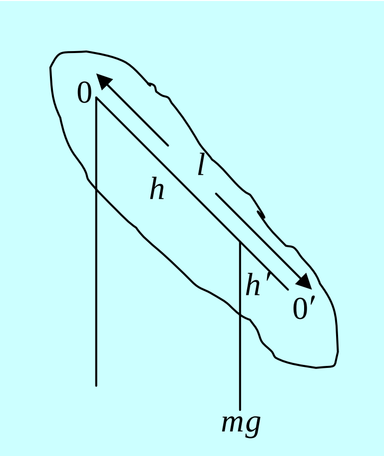
وبشكل عام يمكن إيجاد التردد الزاوي ω من العلاقة (٣٦- ٣) على الشكل التالي :

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{g}{l}}\,(1-\frac{\alpha^2}{16}+.....) \qquad .....(3-37)$$

وعلى الطالب أن يقنع نفسه بان اكبر قيمة للزاوية θ هي α وأنه عندما تكون a صغيرة فان α ستكون صغيرة أيضاً وبالتالي تصبح θ صغيرة وبذلك سوف نحصل على نفس النتائج في حالة الاهتزازات الصغيرة.

(٣,٨) البندول المر ك ب

يطلق اسم بندول مركب على كل جسم صلب معلق يهتز حول محور ثابت ونفترض أن هذا المحور يمر بمركز كتلة الجسم حتى يكون هناك عزم كلي للقوى الخارجية وبالتالي يكون هناك احتمال لحركة اهتزازية. وسنحدد موضع الجسم الصلب بالزاوية θ التي يصنعها الخط الواصل بين نقطة الدوران ومركز الكتلة oc مع الشاقول، كما هو موضح بالشكل (٣- ١١).



الشكل (٣- ١١) البندول المركب.

لدراسة حركة الجسم، نطبق المعادلة (٨) فنكتب :

$$\tau = -Mgh\sin\theta = I_z\ddot{\theta} \qquad ......(3-38)$$

حيث h هي البعد بين مركز الكتلة c ونقطة الدوران o. وبافتراض أن $I_z = Mk_o^2$ حيث k_o نصف قطر الدوران كما عرفناه سابقا، يكون :

$$-Mgh\sin\theta = Mk_o^2\ddot{\theta} \qquad .....(3-39)$$

ومنها فإن :

$$\ddot{\theta}+\frac{gh}{k_o^2}\sin\theta=0 \qquad .....(3-40)$$

لاحظ أن المعادلة (٤٠- ٣) تكافئ معادلة بندول بسيط طوله l يعطى بالعلاقة:

$$l=\frac{k_o^2}{h} \qquad .....(3-41)$$

فإذا افترض أن النقطة o' تبعد عن o (نقطة تعليق الجسم) بالمقدار l فإن:

$$l=h+h' \qquad ......(3-42)$$

لـ h' على بعد o' عن مركز الكتلة c. ويطلق على o' اسم مركز الاهتزازات (Center of Oscillations)، ويستنتج من المعادلات (٤١- ٣) و (٤٢- ٣) على أن:

$$\frac{k_o^2}{h}=h+h' \Rightarrow k_o^2-h^2=hh' \qquad .....(3-43)$$

ومن نظرية المحاور المتعامدة، يمكن أن نكتب $I_o=I_{c.m}+mh^2$ أي أن:

$$mk_o^2=mk_{c.m}^2+mh^2 \qquad .....(3-44)$$

وبالتعويض في المعادلة (٤٣- ٣) يكون:

$$k_{c.m}^2=hh' \qquad .....(3-45)$$

حيث يدل $k_{c.m}$ على نصف قطر الدوران للجسم الصلب بالنسبة لمركز الكتلة. والنقطتان o و o' متناظرتان بحيث أنه لو اهتز الجسم حول محور مار من الأولى أو الثانية لكان له نفس الزمن الدوري تماما لأنه:

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{k_o^2}{gh}}$$

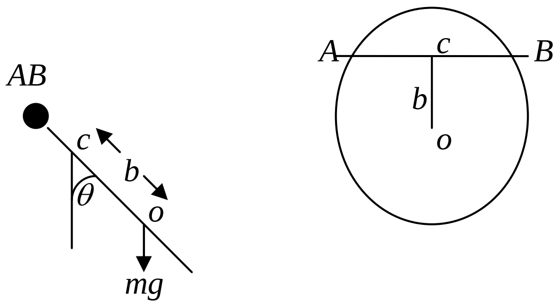
كما أن

$$T_{o'} = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{k_{o'}^2}{gh'}}$$

أي أن $T_o = T_{o'}$

مثال (٣-٥):

يهتز قرص متجانس نصف قطرة a حول محور يقطعه عند نقطتين A و B ، كما في الشكل (٣- ١٢)، ما هو الزمن الدوري للاهتزازات الصغيرة وما قيمة b التي تجعل هذا الزمن اكبر ما يمكن؟



الشكل (٣- ١٢) قرص متجانس.

الحل :

نلاحظ في هذا المثال أن القرص يمثل بندولا مركبا يقع مركز كتلته في مركزة الهندسي 0. أن معادلة الحركة هي:

$$\tau_c = I_c \alpha$$

حيث τ_c عزم القوى الخارجية (والتي هي وزن القرص فقط) حول محور الدوران AB (أنظر الشكل).

$$\tau_c = -Mgb\sin\theta$$

وبحسب المثال (٣- ٣) فان : $I_c = I_{AB} = \frac{1}{4}Ma^2 + Mb^2$

ولذلك تصبح معادلة الحركة :

$$(\frac{1}{4}Ma^2 + Mb^2)\ddot{\theta} = -Mgb\sin\theta$$

ومنها :

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

حيث افترضنا أن الاهتزازات ذات سعة صغيرة وعوضنا $\omega^2 = \left(\frac{gb}{\frac{a^2}{4} + b^2}\right)$ وبذلك يكون الزمن الدوري:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + 4b^2}{4gb}}$$

وأما قيم b التي تجعل الزمن الدوري اكبر ما يمكن فهي تلك التي تجعل ω اصغر ما يمكن ولذلك نشتق ω^2 ونكتب:

$$2\omega\, d\omega = \frac{g\left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)-2b\left(gb\right)}{\left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)^2}=0$$

وبحل هذه المعادلة الجبرية نجد $b=\frac{a}{2}$ وعندها يكون:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \qquad , \qquad \omega=\sqrt{\frac{g}{a}}$$

(٣,٩) الحر كـ ة العامة للأجسام الصلبة، انتقال ودوران

افترضنا حتى الآن في هذا الفصل، أن محور الدوران للجسم الصلب يبقى ثابتا في الفضاء، أما إذا لم يكن الأمر كذلك، بمعنى أن الجسم يدور وينتقل من مكانة بنفس الوقت، فعلينا استخراج نظرية ملائمة لهذه الحالة. ولذلك نكتب من قانون نيوتن الثاني:

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt} \qquad .....(3-46)$$

حيث تدل $\vec{\tau}$ على محصلة العزوم المؤثرة على الجسم حول محور الدوران و $\vec{L}$ على الزخم الزاوي للجسم حول نفس المحور. وذلك بفرض أن $\vec{\tau}$ و $\vec{L}$ منسوبتان إلى منظومة المحاور القصورية، أي ثابتة في الفضاء.

لنعتبر الآن منظومة محاور مبدؤها مركز الكتلة للجسم الصلب ولنحدد موقع أي جسيم m_i من الجسم الصلب بالنسبة لهذه المنظومة $\left(\vec{r}_i'\right)$ ومن ثم نكتب أن موضع هذا الجسيم بالنسبة لمنظومة المحاور القصورية الثابتة $\left(\vec{r}_i\right)$ هو :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{c.m}$$

وبالتعويض في المعادلة (٤٦- ٣) نجد :

$$\vec{\tau} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \frac{d}{dt}\sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)$$

$$= \sum_i \left[\left(\vec{r}_i' + \vec{r}_{c.m}\right) \times \vec{F}_i\right] = \frac{d}{dt}\sum_i \left[\left(\vec{r}_i' + \vec{r}_{c.m}\right) \times m_i \left(\vec{v}_i' + \vec{v}_{c.m}\right)\right]$$

وبنشر الطرفين وملاحظة أن كلا من $\sum_i m_i \vec{r}_i'$ و $\sum_i m_i \vec{v}_i'$ يساوي الصفر (حسب تعريف مركز الكتلة) نجد أن المعادلة السابقة تصبح:

$$\sum_i \left(\vec{r}_i' \times \vec{F}_i\right) + \vec{r}_{c.m} \times \sum_i \vec{F}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \left(\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'\right) + \sum_i m_i \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{c.m} \times \vec{v}_{c.m}\right) \quad \vdots \quad ....(3-47)$$

ولكن:

$$\sum_i \vec{F}_i = M\,\vec{a}_{c.m}$$

كما أن :

$$\sum_i m_i \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{c.m} \times \vec{v}_{c.m}\right) = M\left[\frac{d\,\vec{r}_{c.m}}{dt} \times \vec{v}_{c.m} + \vec{r}_{c.m} \times \frac{d\,\vec{v}_{c.m}}{dt}\right]$$

$$M\,\vec{r}_{c.m} \times \vec{a}_{c.m} = \vec{r}_{c.m} \times M\,\vec{a}_{c.m} = \vec{r}_{c.m} \times \sum_i \vec{F}_i$$

ولذلك نختصر الحد الأخير من الطرف الأيمن مع الحد الثاني من الطرف الأيسر في المعادلة (٤٧- ٣) فنجد :

$$\sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

ولكن المجموع في الطرف الأيمن ما هو إلا الزخم الزاوي للجسم بالنسبة لمركز الكتلة، كما أن المجموع في الطرف الأيسر هو عزم القوى الخارجية بالنسبة لهذا المركز أيضاً، ولذلك نكتب:

$$\vec{\tau}' = \frac{d\vec{L}'}{dt} \qquad ....(3-48)$$

ولهذه النتيجة أهمية كبيرة إذ أنها تعني أن نسبة تغير الزخم الزاوي للجسم الصلب حول مركز كتلته تساوي العزم الكلي للقوى حول مركز الكتلة. وهذه النتيجة صحيحة حتى ولو كان مركز الكتلة متسارعاً، وإذا اخترنا نقطة أخرى بدلا من مركز الكتلة لحساب الزخم الزاوي والعزم بالنسبة لها لوجب أن تكون ساكنة بالنسبة لمنظومة المحاور القصوريه حتى يمكن تطبيق المعادلة (٤٦- ٣).

حالة خاصة:

إذا تحرك الجسم الصلب بحيث بقيت كل ذراتة موازية لمستو ثابت دوما عندئذ نقول أن حركة الجسم مستوية (Laminar Motion). في هذا النوع من الحركة يمكن لمحور الدوران أن ينتقل من مكانة شريطة أن يبقى موازيا لنفسه دائما، وأوضح مثال على هذا تدحرج اسطوانة على مستو مائل. وأما المعادلات اللازمة لتحديد حركة الجسم وموضعه في كل لحظة فهي :

أ) حركة مركز الكتلة

$$\vec{F}_{ext} = M\ \vec{a}_{c.m} \qquad .....(3-49)$$

حيث تدل $\vec{F}_{ext}$ على محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم، M كتلته و $\vec{a}_{c.m}$ تسارع مركز كتلته.

ب) الحركة الدورانية حول مركز الكتلة

$$\vec{\tau}' = \frac{d\vec{L}'}{dt} \qquad .....(3-50)$$

حيث $\vec{\tau}'$ عزم القوى الخارجية حول مركز الكتلة و $\vec{L}'$ الزخم الزاوي بالنسبة لهذا المركز والذي يعطى في هذه الحالة بالعلاقة :

$$L' = I_{c.m}\,\omega \qquad ....(3-51)$$

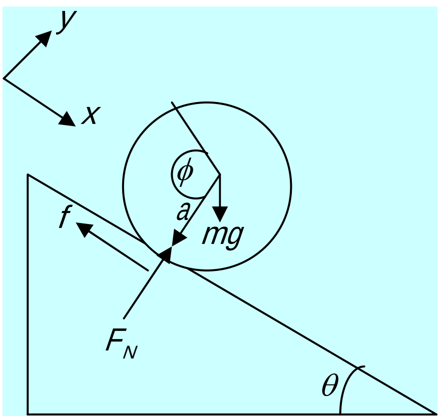
(٣,١٠) جسم صلب مستدير يتدحرج على مستوى مائل

سندرس الآن حركة جسم مستدير كاسطوانة مثلا أو كرة تتدحرج نحو الأسفل على سطح مائل وهذه الحالة هي توضيح للحركة الصفائحية (Laminar Motion). والشكل (٣- ١٣) يبين ثلاثة قوى تؤثر على الجسيم وهي:

أ) قوة الجاذبية التي تؤثر شاقوليا نحو الأسفل.

ب) رد فعل السطح F_N وهي عمودية على السطح.

جـ) قوة الاحتكاك f الموازية للسطح ومعاكسة لاتجاه حركة الجسم.



الشكل (٣- ١٣) جسم صلب مستدير يتدحرج على مستوى مائل.

واعتمادا على المحاور المبينة في الشكل تكون معادلات مركبة الحركة لمركز الكتلة الانتقالية هي:

$$m\ddot{x}_{c.m} = mg\sin\theta - f \qquad .....(3-52)$$
$$m\ddot{y}_{c.m} = -mg\cos\theta + F_N \qquad .....(3-53)$$

حيث θ : زاوية ميل السطح المستوي عن الأفق. وبما أن الجسم المستدير يبقى ملامسا للسطح المستوي، عندئذ يمكن أن نكتب:

$$\ddot{y}_{c.m} = 0 \text{ ومنها فان } y_{c.m} = cons.$$

إذاً المعادلة (٥٣- ٣) تصبح على الشكل التالي:

$$F_N = mg\cos\theta$$

إن القوة الوحيدة التي تحدث عزما حول مركز الكتلة هي قوة الاحتكاك f. ومقدار هذا العزم يساوي $(f\,a)$ حيث a نصف قطر الجسم المستدير.

ومن المعادلة الدورانية $\frac{dL'}{dt} = I_{c.m}\dot{\omega} = \tau'$ يمكن أن نكتب:

$$I_{c.m}\dot{\omega} = f\,a \qquad ....(3-54)$$

ولشرح هذه المسألة بتعمق. سوف نضع بعض الفرضيات بخصوص التلامس بين سطح المستوى المائل والجسم. وسوف نجد الحل لمعادلات الحركة لحالتين هما:

١- عندما تكون الحركة بدون انزلاق

إذا كان التلامس بين السطحين تام الخشونة أي أن $(f \le \mu_s F_N)$ بحيث لا يحدث انزلاق للجسم، تكون لدينا العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} x_{c.m} &= a\varphi \\ \dot{x}_{c.m} &= a\dot{\varphi} = a\omega \qquad \qquad ....(3-55) \\ \ddot{x}_{c.m} &= a\ddot{\varphi} = a\dot{\omega} \end{aligned}$$

حيث φ تمثل زاوية الدوران.

لذلك يمكن كتابة المعادلة (٥٤- ٣) على الشكل التالي:

$$I_{c.m}\frac{\ddot{x}_{c.m}}{a} = f\,a \quad \Rightarrow f = \frac{I_{c.m}}{a^2}\ddot{x}_{c.m} \qquad ....(3-56)$$

وبتعويض قيمة f من المعادلة (٥٦- ٣) في المعادلة (٥٢- ٣) نحصل على :

$$m\ddot{x}_{c.m} = mg\sin\theta - \frac{I_{c.m}}{a^2}\ddot{x}_{c.m}$$

$$\ddot{x}_{c.m} = \frac{mg\sin\theta}{\left(m + \frac{I_{c.m}}{a^2}\right)} = \frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{I_{c.m}}{ma^2}\right)}$$

لكن :

$$I_{c.m} = mk^2_{c.m} \Rightarrow k^2_{c.m} = \frac{I_{c.m}}{m}$$

حيث: $k_{c.m}$ نصف قطر التدوير حول مركز الكتلة. إذن:

$$\ddot{x}_{c.m} = \frac{g\sin\theta}{1 + (\frac{k^2_{c.m}}{a^2})} \qquad ....(3-57)$$

فمثلا: لكرة منتظمة يكون $k^2_{c.m} = \frac{2}{5}a^2$ ولهذا فان تسارعها هو :

$$\ddot{x}_{c.m} = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

٢- عند حدوث الانزلاق

لنفرض ألان الحالة التي يكون فيها التلامس مع السطح المستوي غير تام الخشونة ولكن هنالك معامل احتكاك حركي (μ_k) بين سطحي الجسمين. فإذا انزلق الجسم المستدير على السطح المستوي المائل فان قوة الاحتكاك الحركية تعطى من العلاقة:

$$f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg\cos\theta \qquad ....(3-58)$$

ومن المعادلة (٥٢- ٣) تصبح :

$$m\ddot{x}_{c.m} = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta \qquad ...(3-59)$$

والمعادلة الدورانية تصبح على:

$$I_{c.m}\dot{\omega} = f_k a = \mu_k mg\, a\cos\theta \qquad ...(3-60)$$

من المعادلة (٥٩- ٣) نلاحظ مرة أخرى أن مركز الكتلة يعاني تسارعا ثابتا. إذن:

$$\ddot{x}_{c.m} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) \qquad ....(3-61)$$

وبنفس الوقت فان التسارع الزاوي يكون ثابتا ، أي أن:

$$\dot{\omega} = \frac{\mu_k m\, g\, a\cos\theta}{I_{c.m}} = \frac{\mu_k g\, a\cos\theta}{k^2_{c.m}} \qquad .....(3-62)$$

دعنا الآن نكامل المعادلتين (٦١- ٣) و (٦٢- ٣) بالنسبة للزمن مفترضين أن الجسم بدأ الحركة من السكون أي أن $t=0$, $\dot{x}_{c.m}$, $\dot{\varphi}=0$. فإننا سوف نحصل على:

$$\dot{x}_{c.m} = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)t$$
$$\omega = \dot{\varphi} = g\left(\frac{\mu_k a \cos\theta}{k_{c.m}^2}\right)t \qquad ....(3-63)$$

وبناء على ذلك فان النسبة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية تكون ثابتة ، أي أن:

$$\dot{x}_{c.m} = \gamma a \omega$$

حيث أن :

$$\gamma = \frac{\sin\theta - \mu_k \cos\theta}{\dfrac{\mu_k a^2 \cos\theta}{k_{c.m}^2}} = \frac{k_{c.m}^2}{a^2}\left(\frac{\tan\theta}{\mu_k} - 1\right) \qquad ...(3-64)$$

الآن $(a\omega)$ لا يمكن أن تكون اكبر من $\dot{x}_{c.m}$ ولهذا فان γ لا يمكن أن تكون اقل من واحد. في الحالة المحددة وعندما تكون $\gamma = 1$ يكون هنالك تدحرج فقط يعطى من $\dot{x}_{c.m} = a\omega$.

عند حل المعادلة (٦٤- ٣) للمعامل μ_k فقط، نجد أن القيمة الحرجة لمعامل الاحتكاك μ تكون :

$$\mu_{critical} = \frac{\tan\theta}{1 + \dfrac{a^2}{k_{c.m}^2}} \qquad .....(3-65)$$

في الحقيقة (هذه هي القيمة الحرجة لمعامل الاحتكاك السكوني μ_s).

إذا كان μ_s اكبر من القيمة المعطاة بالعلاقة (٦٥- ٣) عندئذ يتدحرج الجسم بدون انزلاق.

(٣,١١) جسم صلب مستدير يتدحرج على سطح مستوى مائل – فرضيات الطاقة

في هذا البند سوف نستنبط النتيجة السابقة ولكن هذه المرة من فرضيات الطاقة. الطاقة الكامنة U ، في مجال الجاذبية المنتظم، للجسم الصلد تساوي مجموع الطاقات الكامنة للجسيمات

$$U = \sum\left(m_i g z_i\right) = m g z_{c.m}$$

حيث : $z_{c.m}$ المسافة العمودية من مركز الكتلة إلى نقطة مرجعية (اختيارية).

أما الطاقة الحركية للجسم الصلد في حالة تدحرجة نحو الأسفل فهي عبارة عن طاقة حركية انتقالية وتساوي $(\frac{1}{2}m\dot{x}^2{}_{c.m})$ وطاقة حركية دورانية وتساوي $(\frac{1}{2}I_{c.m}\omega^2)$. أي أن:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_{c.m}^2 + \frac{1}{2}I_{c.m}\omega^2$$

وبما أن :

$$T + U = E = cons.$$

إذاً يكون :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_{c.m}^2 + \frac{1}{2}I_{c.m}\omega^2 + mgz_{c.m} = E$$

لكن $\frac{1}{2}m\dot{x}_{c.m}^2 + \frac{1}{2}mk_{c.m}^2\frac{\dot{x}_{c.m}^2}{a^2} - mgx_{c.m}\sin\theta = E \quad \therefore$

في حالة التدحرج فقط، قوة الاحتكاك لا تظهر في معادلة الطاقة ولهذا الطاقة الميكانيكية لا يمكن أن تتحول إلى حرارة إلا إذا حدث انزلاق للجسم. ولهذا الطاقة الكلية E ثابتة.

وبتفاضل المعادلة السابقة بالنسبة للزمن وبتجميع الحدود نحصل على :

$$m\dot{x}_{c.m}\ddot{x}_{c.m}(1+\frac{k_{c.m}^2}{a^2})-mg\dot{x}_{c.m}\sin\theta$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نجد أن:

$$\ddot{x}_{c.m}=\frac{g\sin\theta}{1+\frac{k_{c.m}^2}{a^2}}$$

وهو نفس الحل السابق الذي حصلنا علية سابقا باستخدام القوى والعزم.

(٣,١٢) مسائل

السؤال الأول:

يقع قرص نصف قطره a في المستوى xy بحيث يقع مركزه عند نقطة المبدأ ونصفه الموجود فوق محور السينات له كثافة σ بينما نصفه الموجود تحت محور السينات له كثافة 2σ. جد مركز كتلة القرص وعزم قصوره الذاتي حول كل من ox و oy و oz وحول محور مواز لـ oz ويمر من مركز الكتلة.حاول اختصار العمليات الجبرية ما أمكن بالاستفادة من النظريات التي درستها.

السؤال الثاني:

بفرض أن حجم المخروط يساوي $\frac{1}{3}Ah$ حيث A مساحة القاعدة و h الارتفاع. حدد باستخدام نظريتي بابس مركز كتلة مثلث قائم الزاوية طول ضلعية a و b.

السؤال الثالث:

جد عزم القصور الذاتي لقضيب متجانس طوله L وكتلته m حول محور عمودي علية ويمر من نقطة تبعد $\frac{L}{4}$ عن طرفة. (الجواب $\frac{7}{48}mL^2$).

السؤال الرابع :

جد عزم القصور الذاتي لصفيحة مربعة حول قطر فيها وجد أيضاً نصف قطر التدوير (Radius of Gyration).(الجواب $\frac{1}{12}ma^2$, $\frac{1}{6}a\sqrt{3}$ حيث a طول ضلع الصفيحة).

السؤال الخامس:

جد مركز كتلة سلك منحني على شكل نصف دائرة نصف قطرها a.
أوجد أيضاً أنصاف أقطار ألدوران حول المحاور ox و oy و oz المارين من مركز الكتلة حيث oz عمودي على سطح الدائرة.

(٣,١٣) المراجع

1- Marion, J.B. and Thornton, S.T., ”Classical Dynamics of Particles and System”,3rd ed., Acadimic Press,1988.

2-S.Thornton and J. Marion, ”Classical Dynamics”, 4th ed., Thomson Books,2004.

3- H. Goldstein, ”Classical Mechanics”, 2nd ed., Addison-Wesley, 1992.

4- L.D. Landau and E.M. Lifshits, ”Mechanics”, 3rd ed., Pergammon Press Ltd.,1976.

5- Fowles, G.R. and Cassiday, G.L., ”A Addison-Wesley nalytical Mechanics”, 5th ed., Saunders College Publishing,1993.

معادلات لاجرانج

LAGRANGE'S EQUATIONS

• المقدمة • الإحداثيات المعممة • القوى المعممة • الأنظمة المحافظة • الأنظمة المقيدة • معادلات لاجرانج • معادلات لاجرانج للأنظمة المقيدة • مسائل

(٤,١) المقدمة

استخدمنا في الفصل الأول قانون نيوتن الثاني لإيجاد معادلات الحركة لوصف أنظمة فيزيائية مختلفة، ولكن المسائل الفيزيائية التي يصعب حلها باستخدام قوانين نيوتن، مثل جسيم يتحرك على سطح كرة، أو خرزة تتحرك على سلك دائري أو حلزوني، فمن أجل حل هذه الحالات ظهرت معادلات لاجرانج وكذلك معادلات هاميلتون ، في هذا الفصل سنناقش حل معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج بينما استخدام معادلات هاميلتون سوف يتم شرحها في الفصل الخامس من هذا الكتاب.

إننا هنا لا نتعامل مع كميات متجهة كما هو الحال في قوانين نيوتن، وإنما نتعامل مع كميات عددية تمكننا من حل مسائل صعبة.

(٤,٢) الإحداثيات المعممة Generalized Coordinates

هي أقل عدد ممكن من الإحداثيات اللازمة لوصف نظام فيزيائي يحتوي على N جسيم وسوف نرمز لها بالرمز التالي:

$$q_1 \ , \ q_2 \ , \ q_3 , ..., q_n \ ; \ n \leq 3N$$

حيث n هي عدد درجات الحرية (Degrees of Freedom) للنظام، وبعبارة أخرى نستطيع القول: إن عدد الإحداثيات المعممة هو عدد درجات الحرية للنظام الفيزيائي،وقد تكون إحداثيات كارتيزية (x, y, z) أو إحداثيات اسطوانية (r, θ, z) أو إحداثيات كروية (r, θ, ϕ) أو إحداثيات أخرى مناسبة لوصف النظام الفيزيائي.

لتحديد نظام فيزيائي يحتوي على N جسيم نحتاج إلى $3N$ من الإحداثيات، وإذا كان هناك m علاقة تربط هذه الإحداثيات مع بعضها البعض، فإن عدد الإحداثيات المعممة يكون $(3N - m)$.

فمثلا الإحداثيات المعممة المناسبة في وصف حركة جسيم على سطح نصف كرة، قطرها R بحيث تكون الحركة مقيدة على السطح، وباستخدام الإحداثيات الكارتيزية نحصل على معادلة الكرة:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad , \quad z \geq 0 \qquad (4-1)$$

في هذه الحالة يوجد لدينا ثلاث إحداثيات وعلاقة واحدة، أي أن:

$$N = 1 \ , \ m = 1$$

لذا يكون عدد الإحداثيات المعممة :

$$3N - m = 3 - 1 = 2$$

وهو أقل عدد ممكن من الإحداثيات المعممة لوصف هذا النظام بحيث نستطيع أن نكتب إحدى الإحداثيات بدلالة الإحداثيات الأخرى على الشكل التالي:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \qquad (4-2)$$

نختار الإحداثيات المعممة بحيث تمكننا من تفسير النظام الفيزيائي بسهولة، وتحديد معادلاته. وسوف نرمز لمشتقة ألإحداثي المعمم q_i بالنسبة للزمن بالرمز $\dot{q}_i$ ونسميها السرعة المعممة (Generalized velocity).

من المفاهيم الفيزيائية التي سنعرضها في هذا الفصل القوى المعممة (Generalized forces)، وقبل أن نعرفها سنأخذ بعين الاعتبار حركة جسيم في الإحداثيات المتعامدة x, y, z. إن علاقات هذه الإحداثيات بالإحداثيات المعممة تعطى بواسطة معادلات التحويل (Transformation Equations)

$$x = x(q_1, q_2, q_3)$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3) \qquad (3-3)$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3)$$

وإذا اعتبرنا أن النظام تغير من الوضع الابتدائي (q_1, q_2, q_3) إلى الوضع المجاور $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, q_3 + \delta q_3)$ فإن التغير في الإحداثيات المتعامدة يعطى بالعلاقات التالية :

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\delta q_3 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x}{\partial q_i}\delta q_i \qquad (4-4a)$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\delta q_3 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial y}{\partial q_i}\delta q_i \qquad (4-4b)$$

$$\delta z=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2+\frac{\partial z}{\partial q_3}\delta q_3=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial z}{\partial q_i}\delta q_i \qquad (4-4c)$$

وإذا أردنا أن نعمم هذا التغير على نظام ميكانيكي ويتكون من n إحداثيات معممة وعدد كبير من الجسيمات، (ولنفترض إن الإحداثيات المعممة تغيرت من $(q_1,q_2,\ldots\ldots q_n)$ إلى $(q_1+\delta q_1,q_2+\delta q_2,\ldots\ldots,q_n+\delta q_n)$ للجسيم i) فإن الإحداثيات الكارتيزية تتغير من (x_i,y_i,z_i) إلى $(x_i+\delta x_i\ ,\ y_i+\delta y_i,z_i+\delta z_i)$ بحيث إن الإزاحات $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$ تعطى بالعلاقات التالية:

$$\delta x_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2+\ldots\ldots\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_n}\delta q_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \qquad (4-5a)$$

$$\delta y_i=\frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial y_i}{\partial q_2}\delta q_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial q_n}\delta q_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

$$\delta z_i=\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial z_i}{\partial q_2}\delta q_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\partial z_i}{\partial q_n}\delta q_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k \qquad (4-5c)$$

(٤,٣) القوى المعممة **Generalized Forces**

إذا أثرت قوة $\vec{F}$ على جسيم وأزاحته بمقدار $\delta\vec{r}$ فإن مقدار الشغل الناتج هو:

$$\delta w=\vec{F}.\delta\vec{r}=F_x\delta x+F_y\delta y+F_z\delta z \qquad (4-6)$$

حيث F_x,F_y,F_z المركبات العمودية للقوة $\vec{F}$ ، وبتعويض المعادلات(٤-٤) في المعادلة (٦- ٤) وباعتبار أن عدد الإحداثيات المعممة هو n (أي أن قيم i تتغير من 1 إلى n) نحصل على:

$$\delta w=\sum_{k=1}^{n}\left(F_x\frac{\partial x}{\partial q_k}+F_y\frac{\partial y}{\partial q_k}+F_z\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)\delta q_k=\sum_{k=1}^{n}Q_k\cdot\delta q_k \qquad (4-7)$$

حيث: $Q_k \equiv \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k} \right)$

تسمى القوة المعممة المصاحبة للإحداثي المعمم q_k، وإذا وجد N من القوى $\vec{F}_i$ تؤثر على N من الجسيمات $(i = 1,2,3,........,N)$ فإن الشغل الكلي δW اللازم لإزاحة النظام بمقدار $\delta \vec{r}_i$ يعطى بالعلاقة التالية :

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} F_{x_i} \delta x_i + F_{y_i} \delta y_i + F_{z_i} \delta z_i \qquad (4-8)$$

وباستخدام المعادلات (٥- ٤) نحصل على:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] \qquad (4-9)$$

ومن الممكن أن نكتب المعادلة السابقة على الصيغة التالية :

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] \qquad (4-10)$$

وباختصار :

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k \qquad (4-11)$$

حيث :

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \left(F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \qquad (4-12)$$

تسمى القوى المعممة المصاحبة للإحداثيات المعممة q_k.

مثال (٤-١):

جسيم كتلته m يتحرك في المستوى xy، استخدم الإحداثيات القطبية (r, θ) على اعتبار أنها إحداثيات معممة في حساب ما يلي :

١- الإزاحة $\delta x, \delta y$

٢- القوى المعممة على اعتبار أن القوة $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$ أثرت على الجسيم.

الحل :

$$q_1 = r \quad , \quad q_2 = \theta$$

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta$$

$$y = y(r,\theta) = r\sin\theta$$

١- إن التغير في الإحداثيات الكارتيزية يحسب كما يلي:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial r}\delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\delta\theta = \cos\theta \;\; \delta r - r\sin\theta \;\; \delta\theta$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial r}\delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\delta\theta = \sin\theta \; \delta r + r\cos\theta \; \delta\theta$$

٢- القوى المعممة في اتجاهين تعطى بالعلاقة التالية :

$$Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k}$$

حيث:

$$Q_1 = Q_r \quad , \quad Q_2 = Q_\theta$$

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta = F_r$$

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\,F_x \sin\theta + r\,F_Y \cos\theta = r\,F_\theta$$

ولندرس المثال السابق في الأبعاد الثلاثة باستخدام الإحداثيات الاسطوانية كإحداثيات معممة:

في هذه الحالة يكون:

$$q_1 = r \ , \ q_2 = \theta \ , \ q_3 = z \ , \ x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta \ , \ z = z$$

فان التغير في الإحداثيات الكارتيزية يعطى بالعلاقات التالية :

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial r}\delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial x}{\partial z}\delta z = \cos\theta\ \delta r - r\sin\theta\ \delta\theta$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial r}\delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial y}{\partial z}\delta z = \sin\theta\ \delta r + r\cos\theta\ \delta\theta$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial r}\delta r + \frac{\partial z}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial z}{\partial z}\delta z = \delta z$$

والقوى المعممة هي:

$$Q_1 = Q_r \ , \ Q_2 = Q_\theta \ , \ Q_3 = Q_z$$

وبنفس الطريقة نجد

$$Q_r = F_r \ , Q_\theta = rF_\theta \ , Q_z = F_z$$

(٤,٤) الأنظمة المحافظة Conservative Systems

إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على جسيم أو على مجموعة جسيمات يمكن اشتقاقها من دالة طاقة الوضع، فإن الأنظمة تسمى أنظمة محافظة، وغير ذلك تكون غير محافظة، بعبارة أخرى تسمى القوة $\vec{F}$ قوة محافظة إذا كان :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \quad \text{أو} \quad \vec{\nabla}x\vec{F} = 0$$

حيث V دالة طاقة الوضع بدلالة إحداثيات الموضع، أي أن طاقة الوضع تعطى بالدالة التالية :

$$V = V(x, y, z)$$

إذن مركبات القوة هي:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ , \ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \ , \ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

وبالتالي فإن القوى المعممة تعطى كما يلي:

$$Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k}$$

وبتعبير آخر:

$$Q_k = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (4-13)$$

وهذا يعني أنه في حالة الأنظمة المحافظة تكون مركبة القوة المعممة مساوية لسالب مشتقة دالة الوضع بالنسبة للإحداثي المعمم المقابل لهذه المركبة (q_k).

(٤,٥) الأنظمة المقيدة Constrained Systems

هنالك نوعان من الأنظمة المقيدة:

النوع الأول: الأنظمة المقيدة تقييدا تاما : في هذه الحالة القيد عبارة عن علاقة بين الإحداثيات، يمكن كتابتها على الصيغة التالية:

$$f(q_k, t) = 0 \qquad (4-14)$$

ومن الأمثلة على هذا النوع من القيود الأجسام الجاسئة (Rigid Bodies) حيث أن المسافة ثابتة بين أي نقطتين على الجسم

$$(r_i - r_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$$

ومثال آخر، حركة جسم على سطح كرة نصف قطرها a في هذه الحالة معادلة القيد هي :

$$r - a = 0$$

النوع الثاني: الأنظمة المقيدة تقيدا غير تام والتي لا يمكن التعبير عنها بالمعادلة (٤ -١٤).

(٤,٦) معادلات لاجرانج Lagrange's Equations

إن الطاقة الحركية لجسيم كتلته m يتحرك في الاتجاهات الثلاثة – في الإحداثيات الكارتيزية – تعطى بالشكل التالي :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad (4-15)$$

وإذا كانت الإحداثيات المعممة هي $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots, q_n$ فإن معادلات التحويل إلى الإحداثيات المعممة تعطى بالعلاقات التالية :

$$x = x(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, q_n) \qquad (4-16a)$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, q_n) \qquad (4-16b)$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, q_n) \qquad (4-16c)$$

إن مشتقة الإحداثي X بالنسبة للزمن تأخذ الصورة التالية :

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial x}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial x}{\partial q_n}\dot{q}_n$$

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad (4-17)$$

وباشتقاق طرفي المعادلة (١٧- ٤) بالنسبة إلى $\dot{q}_l$ نحصل على ما يلي:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial q_k}\delta_{kl} = \frac{\partial x}{\partial q_l} \qquad (4-18)$$

حيث δ_{kl} تعرف بالعلاقة التالية:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases}$$

وبنفس الطريقة نثبت أن:

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial y}{\partial q_l} \qquad (4-19)$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial z}{\partial q_l} \qquad (4-20)$$

والآن نشتق طاقة الحركة المعطاة في العلاقة(١٥- ٤) بالنسبة إلى $\dot{q}_k$ على النحو التالي :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_k}) \qquad (4-21)$$

وباستخدام المعادلات السابقة نكتب المعادلة(٢١- ٤) كما يلي :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_k}) \qquad (4-22)$$

وبأخذ المشتقة الزمنية لهذه المعادلة نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)=\left[m\,\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_k}+m\,\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)\right.$$
$$\left.+m\,\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_k}+m\,\dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)+m\,\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_k}+m\,\dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)\right]$$

والتي تكتب على النحو :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)=\left[F_x\frac{\partial x}{\partial q_k}+F_y\frac{\partial y}{\partial q_k}+F_z\frac{\partial z}{\partial q_k}\right.$$
$$\left.+m\quad \dot{x}\,\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_k}+m\quad \dot{y}\,\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_k}+m\quad \dot{z}\,\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_k}\right] \qquad (4-23)$$

حيث أن:

$$F_x=m\,\ddot{x}\ ,\ F_y=m\,\ddot{y},\ \ F_z=m\,\ddot{z}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_k}\quad,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_k}\quad,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_k}$$

وبما أن :

$$m\,\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_k}+m\,\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_k}+m\,\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_k}=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}m\,\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\,\dot{y}^2+\frac{1}{2}m\,\dot{z}^2\right)=\frac{\partial T}{\partial q_k}$$

فإن المعادلة (٢٣- ٤) تكتب على الشكل التالي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k\ ,\ k=1,2,3........,n \qquad (4-24)$$

حيث: $Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k}$ هذه المعادلة التفاضلية (٢٤- ٣) تسمى معادلة لاجرانج التي تصف حركة الأجسام في أي نظام فيزيائي له العدد n من درجات الحرية.

وفي حالة القوى المحافظة :

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (4-25)$$

وطاقة الوضع V لا تعتمد على السرعة أي أن :

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

وهذا يعني أن :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} \qquad (4-26)$$

وبتعويض قيمة Q_k و $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ (باستخدام المعادلتين(٢٥- ٤) و(٢٦- ٤)) في المعادلة (٢٤- ٤) نحصل على معادلة لاجرانج التي تصف حركة جسيم في مجال قوة محافظة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (4-27)$$

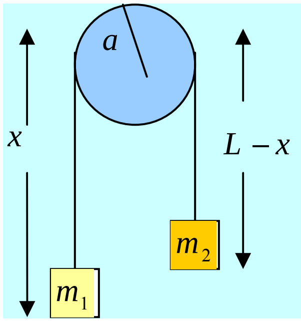
حيث $L = T - V$ تمثل دالة لاجرانج.

وفي حالة القوى غير المحافظة تعطى معادلة لاجرانج بالعلاقة التالية :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_\kappa \qquad (4-28)$$

مثال: آلة اتوود

فمثلا لإيجاد التسارع باستخدام معادلات لاجرانج، لآلة آتوود الموضحة في الشكل(١- ٤)، والتي تتكون من بكرة نصف قطرها a وعزم قصورها الذاتي I حول محور يمر في مركزها وعمودي على مستواها.



الشكل (١- ٤) آلة آتوود.

الحل :

إن طاقة الحركة لهذا النظام هي:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I\ \omega^2$$

حيث ω السرعة الزاوية للبكرة، و v_1 و v_2 هما سرعتا الكتلتين m_1 و m_2 على الترتيب.

$$v_1 = \dot{x} \quad , \quad v_2 = -\dot{x} \quad , \quad \dot{x} = a\ \omega$$

إن طاقة الحركة تصبح:

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2} \right) \dot{x}^2$$

وطاقة الوضع لهذا النظام هي:

$$V = -m_1 g\ x - m_2 g (l - x)$$

الآن دالة لاجرانج تعطى بالعلاقة التالية:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}\right)\dot{x}^2 + m_1 g\, x + m_2 g(l - x)$$

في هذه الحالة يوجد إحداثي معمم واحد، وهذا يعني أن هناك معادلة لاجرانج واحدة، وبما أن القوى محافظة تستخدم العلاقة(٢٧-٤) فنحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

وبتعويض دالة لاجرانج نجد أن :

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{a^2}\right)\ddot{x} - g\left(m_1 - m_2\right) = 0$$

وهذه المعادلة تحدد تسارع النظام

$$\ddot{x} = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \dfrac{I}{a^2}}$$

وإذا أهمل عزم القصور الذاتي للبكرة فإن التسارع يصبح:

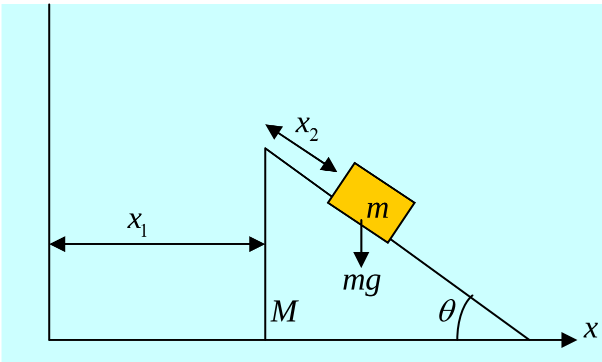
$$\ddot{x} = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

وهذه نفس النتيجة التي نحصل عليها باستخدام قانون نيوتن الثاني للحركة.

مثال : جسيم ينزلق على سطح مائل متحرك

سطح مائل كتلته M يميل عن الأفق بزاوية مقدارها θ كما هو موضح في الشكل(٢- ٤)، ويتحرك في المستوى الأفقي بدون احتكاك. وجسم

آخـر كتلتـه m يتحـرك علـى هـذا الـسطح بـدون احتكـاك أيـضا. اوجـد معادلات لاجرانج لحركة السطح المائل والجسم؟



الشكل (٢- ٤) سطح مائل يتحرك أفقيا ، ينزلق عليه جسم آخر.

الحل: طاقة الحركة للمنظومة هي:

$$T = \frac{1}{2} M \ \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \, v^2$$

حيث سرعة الكتلة m هي:

$$\vec{v} = \vec{\dot{x}}_1 + \vec{\dot{x}}_2 \Rightarrow v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2 \, \dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos\theta$$

إذن:

$$T = \frac{1}{2} M \ \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2 \, \dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos\theta)$$

وطاقة الوضع للمنظومة هي :

$$V = -m \, g \, x_2 \sin\theta$$

ودالة لاجرانج:

$$L = \frac{1}{2} M\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\,\dot{x}_1\,\dot{x}_2 \cos\theta) + m\,g\,x_2 \sin\theta$$

الإحداثيات المعممة هي : x_1 و x_2 ، ومن الجدير بالذكر هنا أن الزاوية θ ثابتة وليست إحداثي معمم. وباستخدام المعادلات (٢٧- ٤) نحصل على معادلتي الحركة :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow M\ \ddot{x}_1 + m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2\ \cos\theta) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_2 + \ddot{x}_1 \cos\theta - g\ \sin\theta = 0$$

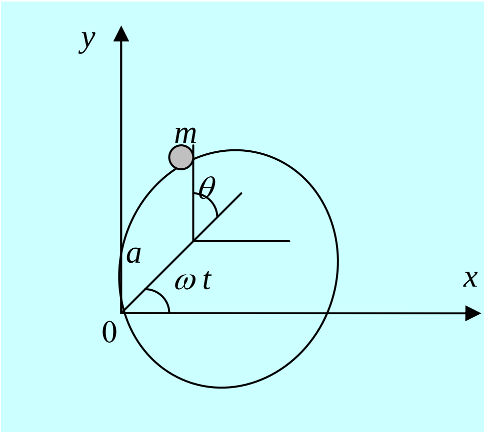
ومن الممكن حل هاتين المعادلتين للحصول على التسارعات التالية:

$$\ddot{x}_1 = \frac{-g\ \sin\theta \cos\theta}{\frac{M+m}{m} - \cos^2\theta}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{g\ \sin\theta}{1 - \left[\frac{m\cos^2\theta}{M+m}\right]}$$

مثال : حركة خرزة على سلك دائري

خرزة كتلتها m تنزلق بدون احتكاك على سلك دائري (حلقة) نصف قطرها a ، إذا كان هذا السلك يدور في المستوى الأفقي بسرعة زاوية مقدارها ω حول محور يمر في النقطة 0 على محيط الحلقة كما في الشكل(٣- ٤). أدرس حركة الخرزة وأوجد رد فعل السلك ؟



الشكل (٣- ٤) خرزة تنزلق على سلك يدور في المستوى الأفقي بسرعة زاوية ω .

الحل:

بما أن الحلقة في وضع أفقي، لذلك تكون الطاقة الحركية $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$.

ونستطيع أن نعتبر طاقة الوضع تساوي صفرا ، وبما أن الخرزة تتحرك على سلك دائري فإننا سنستخدم الإحداثيات القطبية. من الشكل نجد :

$$x=a\ \cos\omega t+a\ \cos(\omega t+\theta)\quad ، \quad y=a\ \sin\ \omega t+a\ \sin(\omega t+\theta)$$

إذن:

$$\dot{x}=-a\ \omega\sin\omega t-[a\ \sin(\omega t+\theta)](\omega+\dot{\theta})$$

$$\dot{y}=a\ \omega\ \cos\ \omega t+[a\ \cos(\omega t+\theta)](\omega+\dot{\theta})$$

لذلك تكتب طاقة الحركة كما يلي:

$$T=\frac{1}{2}m\left[\begin{array}{l} a^2\omega^2\left(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t\right)+a^2\left(\omega+\dot{\theta}\right)^2\left\{\sin^2(\omega t+\theta)+\cos^2(\omega t+\theta)\right\} \\ +2a^2\omega\left(\omega+\dot{\theta}\right)\left\{\cos(\omega t+\theta)\cos\ \omega t+\sin(\omega t+\theta)\sin\omega t\right\}\end{array}\right]$$

بما أن:

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B \qquad , \qquad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

إذن:

$$T=\frac{1}{2}m\left[a^2\omega^2+a^2\left(\omega+\dot{\theta}\right)^2+2a^2\omega\left(\omega+\dot{\theta}\right)\cos\theta\right]$$

يوجد لدينا إحداثي معمم واحد هو θ ، لذلك يوجد لدينا معادلة لاجرانج واحدة. وباستخدام العلاقة(٢٧- ٤) فإنها تعطى كما يلي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta}=0$$

حيث دالة لاجرانج تساوي الطاقة الحركية في هذا المثال، وبتعويض قيمة T نحصل على :

$$\frac{d}{dt}\left[m\,a^2(\omega+\dot{\theta})+m\,a^2\omega\,\cos\theta\right]+m\,a^2\omega\,(\omega+\dot{\theta})\sin\,\theta=0$$

وبإجراء الاشتقاق بالنسبة للزمن نجد:

$$m\,a^2\left(\ddot{\theta}-\omega\dot{\theta}\,\sin\theta\right)+m\,a^2\omega^2\,\sin\theta+m\,a^2\omega\,\dot{\theta}\,\sin\theta=0$$

أي أن:

$$m\,a^2\ddot{\theta}+m\,a^2\omega^2\,\sin\theta=0$$

وبالقسمة على $m\,a^2$ نحصل على المعادلة التالية:

$$\ddot{\theta}+\omega^2\,\sin\theta=0$$

وإذا كانت θ صغيرة جدا، فإن حركة الخرزة ستكون حركة توافقية بسيطة.

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$$

علما بأن: $\sin\theta\cong 0$

ولإيجاد رد الفعل نفترض أن بعد الخرزة عن مركز الدائرة متغير ويساوي r ، ومن ثم نجد معادلة لاجرانج بالنسبة إلى r وبعد ذلك نعوض القيم على النحو التالي :

$$r=0 \quad , \quad \dot{r}=\ddot{r}=0$$

$$x=a\cos\omega t+r\cos(\omega t+\theta) \qquad , \qquad y=a\sin\omega t+r\sin(\omega t+\theta)$$

ومشتقاتها :

$$\dot{x}=-a\,\omega\sin\omega t+\dot{r}\cos(\omega t+\theta)-r\sin(\omega t+\theta)(\omega+\dot{\theta})$$

$$\dot{y}=a\,\omega\cos\omega t+\dot{r}\sin(\omega t+\theta)+r\cos(\omega t+\theta)(\omega+\dot{\theta})$$

إذن ستأخذ طاقة الحركة الصورة التالية:

$$\begin{aligned}
T=\frac{1}{2}m\{&a^2\omega^2\sin^2\omega t+\dot{r}^2\cos^2(\omega t+\theta)\\
&+r^2\sin^2(\omega t+\theta)(\omega+\dot{\theta})^2\\
&-2a\,\omega\,\dot{r}\sin\omega t\cos(\omega t+\theta)\\
&+2a\,\omega\,r\sin\omega t\sin(\omega t+\theta)(\omega+\dot{\theta})\\
&-2r\,\dot{r}\cos(\omega t+\theta)\sin(\omega t+\theta)(\omega+\dot{\theta})\\
&+a^2\omega^2\cos^2\omega t+\dot{r}^2\sin^2(\omega t+\theta)\\
&+r^2\cos^2(\omega t+\theta)(\omega+\dot{\theta})^2+2a\,\omega\,\dot{r}\cos\omega t\sin(\omega t+\theta)\\
&+2a\,\omega\,r\cos\omega t\cos(\omega t+\theta)(\omega+\dot{\theta})\\
&+2r\,\dot{r}\sin(\omega t+\theta)\cos(\omega t+\theta)(\omega+\dot{\theta})\}
\end{aligned}$$

وبتجميع هذه الصورة نحصل على طاقة الحركة على الصيغة التالية:

$$T=\frac{1}{2}m\left\{a^2\omega^2+\dot r^2+r^2(\omega+\dot\theta)^2+2a\,\omega\,\dot r\,\sin\theta+2a\,\omega\,r(\omega+\dot\theta)\cos\theta\right\}$$

علما بأن:

$$\cos(A\pm B)=-(\cos A\cos B\pm\sin A\sin B)$$

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$$

وباستخدام معادلات لاجرانج نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot r}\right)-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r\ =R$$

حيث R رد فعل السلك الدائري للخرزة.لكن

$$\frac{\partial T}{\partial\dot r}=m\,\dot r+m\,a\,\omega\,\sin\theta \quad \text{و} \quad \frac{\partial T}{\partial r}=m\,r(\dot\theta+\omega)^2+m\,a\,\omega\,\cos\theta(\theta+\omega)$$

لذلك فإن معادلة لاجرانج للحركة في البعد r تصبح كالأتي:

$$m\,\ddot r+m\,a\,\omega\cos\theta\,\dot\theta-m\,r(\omega+\dot\theta)^2-m\,a\,\omega^2\cos\theta-m\,a\,\omega\,\dot\theta\cos\theta=R$$

نعوض الآن $r=a$ و $\dot r=\ddot r=0$ فنحصل على :

$$-m\,a(\omega+\dot\theta)^2-m\,a\,\omega^2\cos\theta=R$$

حيث R رد الفعل.

مثال: حركة خرزة على سلك حلزوني الشكل

سلك مثني على شكل حلزوني بحيث يحقق العلاقتين $r=a$ و $z=k\theta$ في الإحداثيات الاسطوانية، علما بأن a و k ثابتان.وضح حركة خرزة على هذا السلك إذا كانت الخرزة تتحرك بدون احتكاك ولكن تؤثر عليها قوة جذب $\vec F$ باتجاه مركز السلك تتناسب طرديا مع بعد الخرزة عن المركز ؟

الحل:

تعطى طاقة الحركة في الإحداثيات الاسطوانية بالعلاقة التالية:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2\right) \quad \text{لكن} \quad z=k\theta$$

إذن مشتقاتها بالنسبة للزمن $\dot{z}=k\dot{\theta}$ وكذلك $r=a$ ومشتقاتها بالنسبة للزمن $\dot{r}=0$

نعوض قيم $\dot{r}\,,\,\dot{z}$ و r فنجد أن طاقة الحركة تساوي :

$$T=\frac{1}{2}m\left(k^2\dot{\theta}^2+a^2\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}m\left(k^2+a^2\right)\dot{\theta}^2$$

قوة الجذب المركزية التي تؤثر على الخرزة هي:

$$\vec{F}=-\alpha\,\vec{\rho}$$

حيث α ثابت التناسب، و $\vec{\rho}$ متجه الموقع للخرزة وقيمته تعطى بالعلاقة:

$$\rho^2=r^2+z^2=a^2+k^2\theta^2$$

طاقة الوضع للخرزة هي:

$$V=-\int\vec{F}.d\vec{\rho}=-\int-\alpha\,\vec{\rho}.d\vec{\rho}=+\int(\alpha\rho)d\rho=+\frac{1}{2}\alpha\rho^2=+\frac{1}{2}\alpha(a^2+k^2\theta^2)$$

دالة لاجرانج هي:

$$L=\frac{1}{2}m(a^2+k^2)\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}\alpha(a^2+k^2\theta^2)$$

معادلة لاجرانج تعطى بالعلاقة التالية:

$$m(a^2+k^2)\ddot{\theta}+\alpha\,k^2\theta=0$$

ومنها :

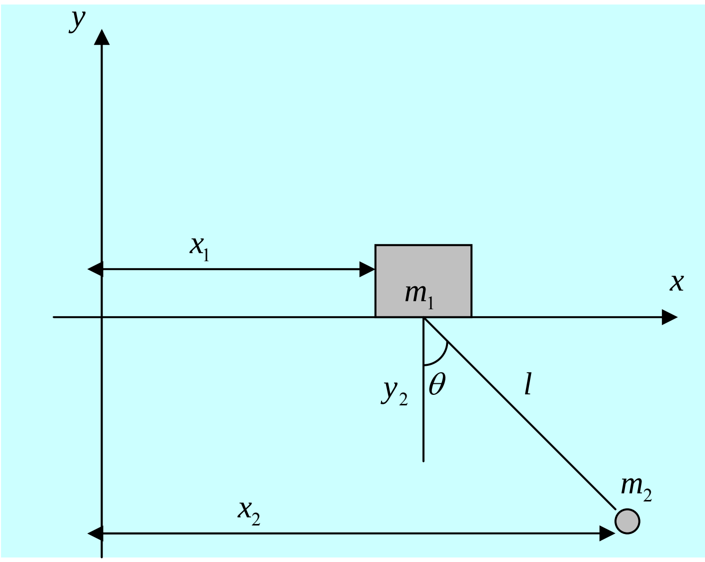
$$\ddot{\theta}+\frac{\alpha\, k^2}{m(a^2+k^2)}\theta=0$$

إن هذه المعادلة تبين أن الخرزة تتحرك حركة توافقية بسيطة بتردد ω مقداره

$$\omega=\sqrt{\frac{\alpha\, k^2}{m(a^2+k^2)}}$$

مثال :حركة بندول مربوط بجسم متحرك

الشكل (٤- ٤) يتكون من بندول كتلته m_2 ، معلق بصندوق صغير كتلته m_1 يتحرك على المحور الأفقي x بدون احتكاك. على اعتبار أن البندول يتحرك في المستوى xy ، جد دالة لاجرانج ومعادلات الحركة للمنظومة؟ ثم جد حل معادلات الحركة في حالة الاهتزازات الصغيرة ؟



الشكل (٤- ٤) بندول معلق بصندوق متحرك.

الحل:

الإحداثيات المعممة في هذه الحالة x_1 و θ. طاقة الحركة للمنظومة هي:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

حيث:

$$x_2 = l \sin\theta + x_1 \Rightarrow \dot{x}_2 = l\,\dot{\theta} \cos\theta + \dot{x}_1$$

$$y_2 = l \cos\theta \Rightarrow \dot{y}_2 = -l\dot{\theta} \sin\theta$$

فتكون طاقة الحركة وطاقة الوضع للمنظومة على الترتيب :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\, \dot{x}_1 \cos\theta + \dot{x}_1^2 \right)$$

$$V = -m_2\, g\, l \cos\theta$$

لذلك تكون دالة لاجرانج كما يلي:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\, \dot{x}_1 \cos\theta + \dot{x}_1^2 \right) + m_2\, g\, l \cos\theta$$

الإحداثيات المعممة هنا هي θ و x_1 لذلك يوجد معادلتا حركة، معادلة لاجرانج الأولى :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

وتحسب المشتقات الجزئية لدالة لاجرانج كما يلي:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_1 + m_2\, l \cos\theta\, \dot{\theta} \qquad , \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

إذن تأخذ معادلة لاجرانج الأولى الشكل التالي:

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1+m_2\, l\cos\theta\,\ddot{\theta}-m_2\, l\sin\theta\,\dot{\theta}^2=0$$

ومعادلة لاجرانج الثانية هي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

والمشتقات الجزئية لها:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m_2\, l^2\,\dot{\theta}+m_2\, l\,\cos\theta\,\dot{x}_1 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial\theta}=-m_2\, l\,\dot{x}_1\dot{\theta}\sin\theta-m_2\, l\, g\,\sin\theta$$

وبالتعويض في دالة لاجرنج نحصل على:

$$m_2\, l^2\ddot{\theta}+m_2\, l\cos\theta\,\ddot{x}_1-m_2\, l\,\dot{x}_1\,\dot{\theta}\,\sin\theta+m_2\, l\,\dot{x}_1\dot{\theta}\,\sin\theta+m_2\, l\,\sin\theta=0$$

$$m_2\, l^2\,\ddot{\theta}+m_2\, l\cos\theta\,\ddot{x}_1+m_2\, l\, g\,\sin\theta=0$$

وفي حالة الاهتزازات الصغيرة، نعتبر:

$$\cos\theta\cong 1 \quad , \quad \sin\theta\cong\theta \quad , \quad \dot{\theta}^2=0$$

فتصبح معادلات الحركة كما يلي:

$$\left(m_1+m_2\right)\ddot{x}_1+m_2\, l\,\theta=0$$

$$m_2\, l^2\,\ddot{\theta}+m_2\, l\,\ddot{x}_1=-m_2\, l\, g\theta$$

ومنها نستطيع إيجاد $\ddot{x}_1$ بدلالة $\ddot{\theta}$ من المعادلة الأولى:

$$\ddot{x}_1=\frac{-m_2\, l\,\ddot{\theta}}{m_1+m_2}$$

وإذا أردنا الحصول على $\ddot{\theta}$ بدلالة θ نعوض في المعادلة الثانية:

$$m_2 \ l^2 \ \ddot{\theta} - \frac{m_2^2 \ l^2 \ddot{\theta}}{m_1 + m_2} = -m_2 l g \theta$$

وبصيغة أخرى :

$$\ddot{\theta}\left[l - \frac{m_2 \ l}{m_1 + m_2}\right] + g \ \theta = 0$$

وبتبسيطها نحصل على:

$$\ddot{\theta} \ \frac{m_1 \ l}{m_1 + m_2} + g\theta = 0$$

فتكون الصورة النهائية لها:

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_1 + m_2) \ g}{m_1 \ l} \ \theta = 0$$

وهي معادلة الحركة التوافقية البسيطة وحلها هو:

$$\theta = A \sin(\omega t + \delta)$$

حيث التردد الزاوي ω يساوي:

$$\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) \ g}{m_1 \ l}}$$

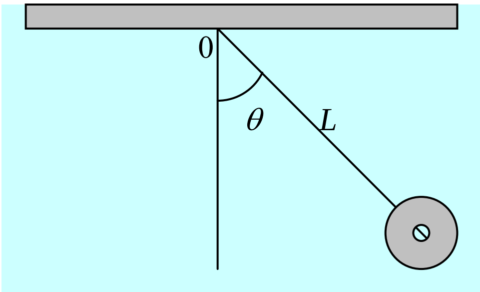
والآن من السهل إيجاد ألإحداثي x_1 وهو:

$$x_1 = c_1 t + c_2 - \frac{m_2 \ l \theta}{m_1 + m_2}$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان.

مثال: تأرجح قضيب وقرص

قضيب منتظم طوله L وكتلته M ، أحد طرفيه مثبت عند النقطة 0 (كما في الشكل(٥- ٤)) والطرف الآخر مربوط بمركز قرص رقيق كتلته M ونصف قطره R ، يتأرجح القضيب في المستوى العمودي، والقرص يتأرجح ويدور بنفس الوقت.جد معادلات الحركة لهذا النظام؟



الشكل (٥- ٤) قضيب وقرص يتأرجحان.

الحل:

طاقة الحركة الناتجة عن تأرجح القضيب والقرص على التوالي:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_{rod} \dot{\theta}^2$$

حيث θ الزاوية التي يصنعها البندول مع المحور الرأسي، و $I_{rod} = \frac{1}{3} ML^2$ عزم قصور القضيب.

$$T_2 = \frac{1}{2} I_{dis} \dot{\theta}^2$$

حيث $I_{dis} = M L^2$ عزم قصور القرص الناتج عن تأرجحه.

وطاقة الحركة الناتجة عن دوران القرص هي :

$$T_3 = \frac{1}{2} I_{dr} \dot{\Phi}^2$$

حيث $I_{dr} = \frac{1}{2}MR^2$ عزم القصور الناتج عن دوران القرص حول مركزه، فتكون الطاقة الحركية الكلية على النحو التالي :

$$T = \frac{1}{6}M\ L^2\ \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\ L^2\ \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}M\ R^2\dot{\Phi}^2 = \frac{2}{3}M\ L^2\ \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}M\ R^2\ \dot{\Phi}^2$$

وطاقة الوضع للقضيب V_1 هي:

$$V_1 = \frac{MgL}{2}(1-\cos\theta)$$

وطاقة الوضع للقرص V_2 هي:

$$V_2 = MgL(1-\cos\theta)$$

فتكون طاقة الوضع الكلية V هي:

$$V = \frac{3MgL}{2}(1-\cos\theta)$$

إذن تعطى دالة لاجرانج بالعلاقة التالية:

$$L = \frac{2}{3}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\Phi}^2 - \frac{3}{2}MgL(1-\cos\theta)$$

وباستخدام معادلات لاجرانج (٢٧- ٤) نحصل على معادلتي الحركة:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{9}{8}\frac{g}{L}\right)\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\Phi} = 0$$

تبين المعادلة الأولى أنها معادلة حركة توافقية بسيطة، إذا كانت الزاوية θ صغيرة. ترددها الزاوي ω يساوي

$$\omega = \sqrt{\frac{9}{8}\frac{g}{L}}$$

وتبين المعادلة الثانية أن السرعة $\dot{\Phi}$ تساوي مقدار ثابتا.

(٤,٧) معادلات لاجرانج للأنظمة المقيدة

تحدثنا في بداية هذا الفصل عن القيود تامة التقييد، وعن غير التامة، وهنا نود أن نبين كيفية التعامل مع هذه القيود، وإدخالها إلى معادلات لاجرانج، ومن ثم كيفية الاستفادة منها لإيجاد القوى المسببة لهذه القيود مثل قوة رد الفعل، أو قوة الاحتكاك.

إذا كانت القيود تحتوي على السرعة فيمكن التعبير عنها بما يلي:

$$f_\alpha(q_i\ ,\dot{q}_i\ ,t) = 0 \quad \begin{cases}\alpha = 1,2,3,............m\\ i = 1,2,3,............n\end{cases} \quad m < n$$

وتعتبر قيود غير تامة التقييد إلا إذا كان من الممكن تكاملها وإيجاد بعض الإحداثيات بدلالة الأخرى. اعتبر القيد التالي :

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\,\dot{q}_i + B = 0$$

فهذا القيد غير تام التقييد، لأنه لا يمكن تكامله إلا إذا اعتبرنا أن:

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad , \quad B = \frac{\partial f}{\partial t} \quad , \quad f = f(q_i, t)$$

عندها يمكن إعادة صياغة هذا القيد على الشكل التالي :

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

وهذا يكافئ :

$$\frac{df}{dt}=0$$

وبالتالي :

$$f(q_i,t)=c$$

حيث c مقدار ثابت. في هذه الحالة يكون القيد تام التقييد. نستنتج مما سبق أنه يمكن كتابة القيود تامة التقييد على الشكل التفاضلي التالي:

$$df_\alpha=\sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt=0 \qquad (4-29)$$

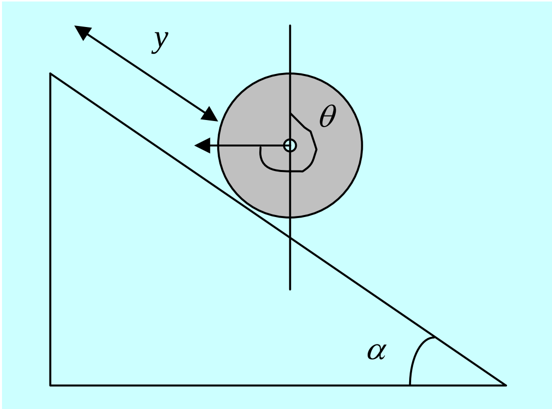
نستطيع الآن أن ندخل هذه القيود إلى معادلات لاجرانج باستخدام مضاعفات لاجرانج $\lambda_\alpha(t)$. حيث أن معادلات لاجرانج في حالة وجود مثل هذه القيود تعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum_\alpha \lambda_\alpha(t)\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \qquad (4-30)$$

يجب أن نلاحظ أن عدد مضاعفات لاجرانج يساوي عدد القيود ، وأن مضاعفات لاجرانج هي عبارة عن قوى القيود. وحتى نوضح هذه الفكرة سندرس الأمثلة التالية:

مثال : دراسة حركة قرص يتدحرج على سطح مائل بدون انزلاق

يتدحرج قرص كتلته M ونصف قطره R بدون انزلاق على سطح مائل بزاوية α عن الأفق كما في الشكل (٦- ٤).



الشكل (٦- ٤) قرص يتدحرج على سطح مائل.

إن معادلة القيد هي $y = R\theta$ ، أي أن إزاحة القرص تساوي نصف القطر مضروبا في الزاوية θ التي دارها ، ويمكن كتابة هذا القيد على الصورة التالية :

$$f(y\,,\theta) = y - R\theta = 0$$

طاقة الحركة في هذه الحالة تتكون من جزأين:طاقة حركة دورا نية ناتجة عن دوران القرص وهي: $\frac{1}{2}I\,\dot{\theta}^{2}$ علما أن عزم قصور القرص $I = \frac{1}{2}MR^2$ ، وطاقة حركة انتقالية ناتجة عن انتقال القرص وهي: $\frac{1}{2}M\ \dot{y}^2$. أما طاقة الوضع فهي: $V = -M\ g\ y \sin\alpha$ على افتراض أن طاقة الوضع تساوي صفرا عند القمة ، وعلى هذا الأساس فإن دالة لاجرانج تعطى بالعلاقة التالية :

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\ \dot{y}^2 + \frac{1}{4}M\ R^2\dot{\theta}^{\,2} + Mg\ y\sin\alpha$$

وبما أنه لدينا قيد واحد، فإن عدد مضاعفات لاجرانج واحد. وباستعمال معادلة لاجرانج (٣٠- ٤) نحصل على معادلات الحركة التالية :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=\lambda\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=\lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad (4-31)$$

باستعمال المعادلة(٢٩- ٤) يمكن أن يكتب القيد على الشكل الآتي :

$$df = dy - R\,d\theta$$

المشتقات الجزئية لدالة لاجرانج بالنسبة لكل من θ ، $\dot{\theta}$ ، y و $\dot{y}$ هي:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=M\ \dot{y} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y}=Mg\sin\alpha$$

أيضا :

$$\frac{\partial f}{\partial y}=1 \quad , \frac{\partial f}{\partial \theta}=-R$$

وبتعويض هذه المشتقات في المعادلة(٣١- ٤)، تصبح معادلات الحركة كما يلي:

$$\frac{1}{2}M\ R^2\ddot{\theta}=-R\lambda$$

$$M\ \ddot{y}-Mg\sin\alpha=\lambda$$

بالإضافة إلى القيد $y=R\theta$ ، فإنه يوجد لدينا ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل λ ، y و θ

$$\lambda = \frac{-M\ R\ddot{\theta}}{2} = \frac{-M\ \ddot{y}}{2}$$

حيث $\ddot{y} = R\ddot{\theta}$ كما تبين من معادلة القيد. وبتعويض قيمة λ في معادلات الحركة السابقة نحصل على:

$$\frac{3}{2}M\ \ddot{y} = Mg\ \sin\alpha \Rightarrow \ddot{y} = \frac{2g\ \sin\alpha}{3}$$

إذن قوة القيد

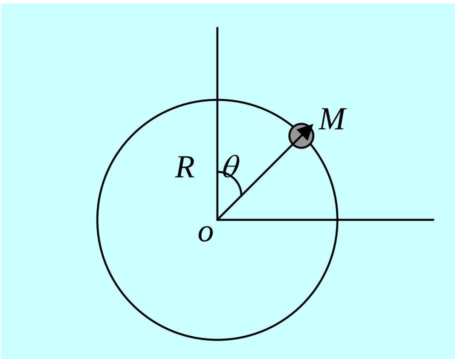
$$\lambda = \frac{-Mg\ \sin\alpha}{3}$$

وأخيرا التسارع الزاوي

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{y}}{R} = \frac{2g\ \sin\alpha}{3R}$$

مثال: دراسة حركة خرزة تنزلق من على قمة حلقة.

خرزة كتلتها M تنزلق إلى الأسفل بدون احتكاك من قمة حلقة دائرية نصف قطرها R. كما في الشكل (٧- ٤).



الشكل (٧- ٤) خرزة تنزلق من قمة حلقة.

طاقة الحركة والوضع – للخرزة – على الترتيب هما :

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$V = M\, g\, r \cos\theta$$

على افتراض أن طاقة الوضع عند مستوى مركز الحلقة صفر. دالة لاجرانج هي:

$$L = \frac{1}{2} M (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - M\, g\, r \cos\theta$$

بالإضافة إلى القيد $r = R$. نكتب معادلات لاجرانج كما يلي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda \frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

التفاضلات الجزئية لدالة لاجرانج هي:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = M\, \dot{r} \quad ، \frac{\partial L}{\partial r} = M\, r \dot{\theta}^2 - M\, g \cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M\, r^2 \dot{\theta} \quad ، \frac{\partial L}{\partial \theta} = M\, g\, r \sin\theta$$

وباستخدام الصيغة(٢٩- ٤) نجد أن:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 1$$

لذلك تصبح معادلات الحركة كما يلي:

$$M\, \ddot{r} - M\, r \dot{\theta}^2 + M\, g \cos\theta = \lambda$$

$$M\ r^2\ddot{\theta}+2M\ r\ \dot{r}\dot{\theta}-M\ g\ r\ \sin\theta=0$$

لكن القيد $r=R$ يعطي

$$\dot{r}=\ddot{r}=0$$

لذلك تصبح معادلات لاجرانج على النحو التالي:

$$M\ R^2\ddot{\theta}-M\ g\ R\sin\theta=0$$

$$-M\ R\dot{\theta}^{\,2}+M\ g\cos\theta=\lambda$$

بضرب طرفي المعادلة الأولى ب $\dfrac{\dot{\theta}}{MR}$ نحصل على:

$$R\ddot{\theta}\dot{\theta}=g\ \sin\theta\dot{\theta}$$

وبما أن:

$$\ddot{\theta}\quad\dot{\theta}=\frac{1}{2}\frac{d\left(\dot{\theta}^2\right)}{dt}\ \text{و}\ \ \sin\theta\dot{\theta}=-\frac{d}{d\,t}(\cos\theta)$$

عوض هذه في المعادلة السابقة ينتج:

$$\frac{1}{2}R\frac{d\left(\dot{\theta}^{\,2}\right)}{d\,t}=-g\frac{d}{d\,t}(\cos\theta)$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على:

$$\frac{1}{2}R\dot{\theta}^{\,2}=-g\cos\theta+c$$

حيث c ثابت.والآن عند الزمن $t=0$ تكون $\theta=0\,,\dot{\theta}=0$ وتكون قيمة الثابت c تساوي g . إذن:

$$\dot{\theta}^{2}=\frac{-2g}{R}(\cos\theta-1)$$

وللحصول على رد الفعل نعوض عن قيمة $\dot{\theta}^2$ في معادلة الحركة في البعد r :

$$-M\,R\dot{\theta}^{2}+M\,g\cos\theta=\lambda$$

$$-M\,R\left(\frac{-2g}{R}\right)(\cos\theta-1)+M\,g\cos\theta=\lambda$$

$$\lambda=M\;g(3\cos\theta-2)$$

وعندما تسقط الخرزة من الحلقة يكون رد الفعل يساوي صفرا وهذا يحصل عندما

$$M\;g(3\cos\theta-2)=0\Rightarrow\cos\theta=\frac{2}{3}\Rightarrow\theta=48^{0}$$

والقوة المركزية هي:

$$F_{c}=M\,R\dot{\theta}^{2}=-2M\,g(\cos\theta-1)$$

مثال : حركة خرزة تنزلق على سلك حلزوني الشكل

سلك أملس مثني على شكل حلزوني، تنزلق عليه خرزة كتلتها m ، إذا أثرت على الخرزة أثناء الحركة قوة جذب باتجاه المركز تتناسب طرديا مع المسافة بين الخرزة والمركز $\vec{F}=-\alpha\,\vec{r}$ ، جد مركبات رد الفعل على الخرزة في الاتجاهات الثلاثة $(\rho\,,\,\theta\,,\,z)$.علما بأن الإحداثيات الأسطوانية لمسار الخرزة تحقق العلاقتين $z=k\theta$ و $\rho=a$ ، حيث k و a ثابتان.

الحل:

طاقة الحركة في الإحداثيات الأسطوانية هي:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

ونحسب طاقة الوضع من القوة كما يلي:

$$V = -\int \vec{F}.d\vec{r} = \frac{1}{2}\alpha\, r^2 = \frac{1}{2}\alpha(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}\alpha(\rho^2 + z^2)$$

إذن دالة لاجرانج هي:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}\alpha(\rho^2 + z^2)$$

هذه الدالة تبين أنه يوجد لدينا ثلاث إحداثيات معممة ρ ، θ و z. لذلك يوجد لدينا ثلاث معادلات للحركة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \rho} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \rho}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

حيث إن دالتي القيد هما:

$$f_1 = \rho - a \quad , \quad f_2 = z - \theta k$$

يوجد قوتا قيد λ_2 و λ_1 لأن هناك قيدين. وبكتابة هذه القيود على الصيغة (٢٩- ٤)، نجد أن:

$$df_1 = d\rho \quad , \quad df_2 = dz - k\, d\theta$$

المشتقات الجزئية التي تظهر في معادلات الحركة تعطى بالعلاقات التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \qquad \dot{\rho}, \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\theta}^{2} - \alpha\rho \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial \rho} = 1 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = -k$$

نعوض قيم هذه المشتقات في معادلات لاجرانج السابقة، فنحصل على معادلات الحركة التالية :

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^{2} + \alpha\rho = \lambda_1$$

$$m\rho^2\ddot{\theta} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\theta} = -k\lambda_2$$

$$m\ddot{z} + \alpha z = \lambda_2$$

نلاحظ وجود ثلاث معادلات حركة بالإضافة إلى معادلتي القيود ، فيصبح لد ينا خمس معادلات بخمسة مجاهيل يمكن إيجادها λ_2 ، λ_1 ، z ، θ ، ρ.

الآن باستخدام القيود

$$\rho = a \quad , \quad \dot{\rho} = 0 \quad , \quad \ddot{\rho} = 0$$

$$z = k\theta \quad , \quad \dot{z} = k\dot{\theta} \quad , \quad \ddot{z} = k\ddot{\theta}$$

وعند التعويض في معادلات الحركة فتصبح النتيجة النهائية كما يلي:

$$-ma\dot{\theta}^{2} + \alpha a = \lambda_1$$

$$mk\ddot{\theta} + k\alpha\theta = \lambda_2$$

$$ma^2\ddot{\theta} = -k\lambda_2$$

وبتعويض قيمة λ_2 من المعادلة التي قبلها نجد:

$$m a^2 \ddot{\theta} = -m k^2 \ddot{\theta} - \alpha k^2 \theta$$

أي أن:

$$m(a^2 + k^2)\,\ddot{\theta} + \alpha k^2 \theta = 0$$

إذن معادلة الحركة يمكن أن تكتب على الصيغة التالية:

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha \; k^2}{m(a^2 + k^2)}\theta = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها يعطى بالعلاقة:

$$\theta = A \cos(\omega t + \delta)$$

حيث:

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha k^2}{m(a^2 + k^2)}}$$

نستطيع الآن إيجاد قيم λ_1 و λ_2 وذلك بتعويض $\theta = A\cos(\omega t + \delta)$ في معادلات الحركة السابقة، فنحصل على رد الفعل باتجاه المحور z وهو : $F_z = \lambda_2$ ، والمركبة الزاوية $F_\theta = -k\lambda_2$ ، والمركبة القطرية $F_r = \lambda_1$.

(٤,٨) مسائل

السؤال الأول:

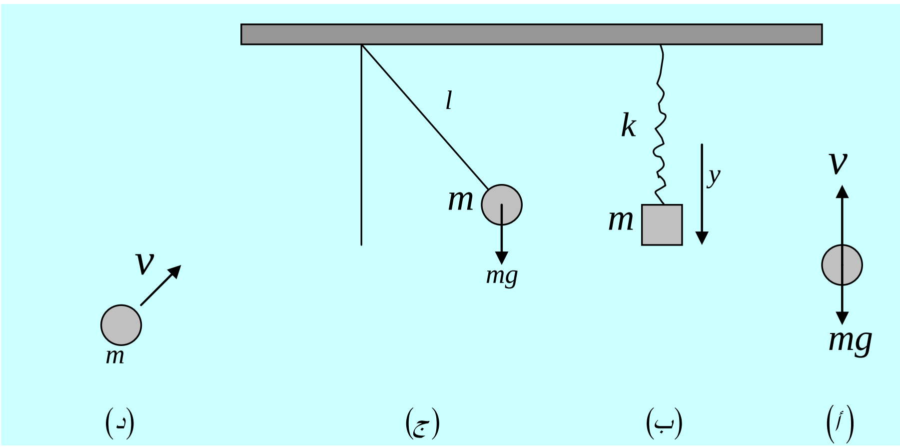
مستعينا بالشكل (٨- ٤)، اوجد معادلات لاجرانج للحركة في الحالات التالية :

أ) جسم كتلته m قذف للأعلى تحت تأثير الجاذبية الأرضية ؟

ب) جسم كتلته m معلق بزنبرك ثابت مرونته k يهتز في المستوى العمودي ؟

ج) بندول بسيط يتأرجح في المستوى العمودي ؟

د) جسم كتلته m يتحرك تحت تأثير الجاذبية الأرضية في الاتجاهات المتعامدة الثلاثة؟



الشكل (٨- ٤):

أ)جسم مقذوف،

ب)جسم معلق بزنبرك،

ج) بندول بسيط ،

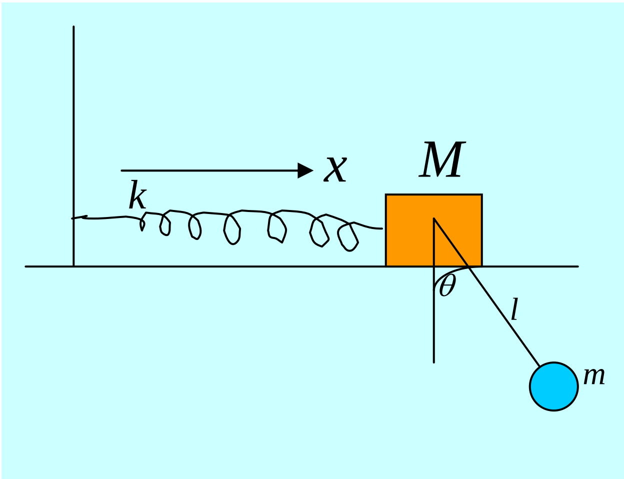
د)جسم يتحرك في الاتجاهات الثلاثة.

السؤال الثاني:

أوجد معادلات الحركة والقوى المعممة لجسم كتلته m ويتحرك في المستوى القطبي، ويخضع لقوة الجذب العكسي $F = -\frac{k}{r^2}$.

السؤال الثالث:

جسم كتلته M مربوط بزنبرك ثابت مرونته k، وطرفه الأخر مثبت. يتحرك هذا الجسم على مستوى أفقي أملس. علق به بندول بسيط كتلته m وطوله l كما في الشكل (٩- ٤). جد معادلات لاجرانج لهذا النظام في حالة الاهتزازات البسيطة ؟



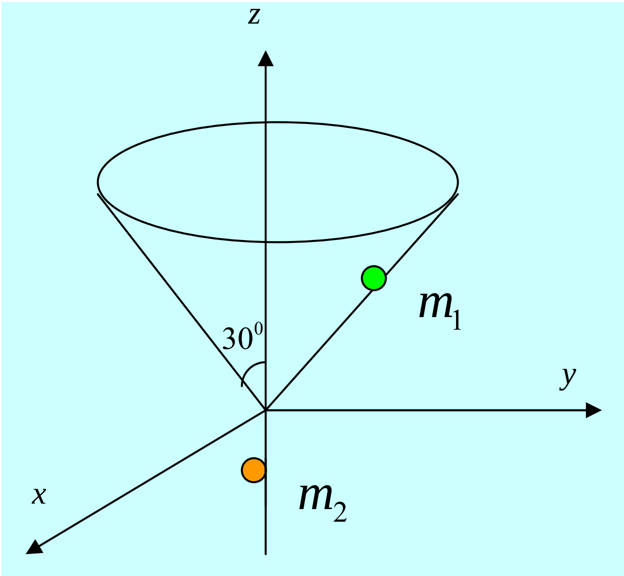
الشكل (٩- ٤) بندول وزنبرك.

السؤال الرابع:

كتلتان m_1 و m_2 مربوطتان بواسطة خيط مهمل الكتلة طوله l.تتحرك الكتلة m_1 على السطح الداخلي للمخروط بدون احتكاك كما في الشكل (١٠- ٤)بينما تتحرك الكتلة m_2 للأعلى والأسفل فقط. جد

معادلات لاجرانج لهذا النظام، مع العلم أن مربع السرعة في الإحداثيات الكروية يعطى بالعلاقة :

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \rho^2 \sin^2\theta\dot{\Phi}^2$$



الشكل (١٠- ٤) كتلته تتحرك على سطح مخروط.

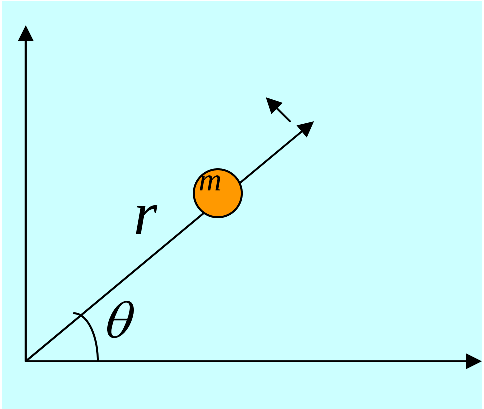
السؤال الخامس:

تنزلق خرزة كتلتها m على سلك مستقيم مهمل الكتلة بدون احتكاك كما في الشكل (١١- ٤). إذا كان السلك يدور بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ω في المستوى العمودي.

أ) اوجد موضع الخرزة القطري كدالة بالنسبة للزمن (افتراض أن $\dot{r} = v$ و $r = R$ عندما $t = 0$

وتسارع الجاذبية الأرضية g ؟

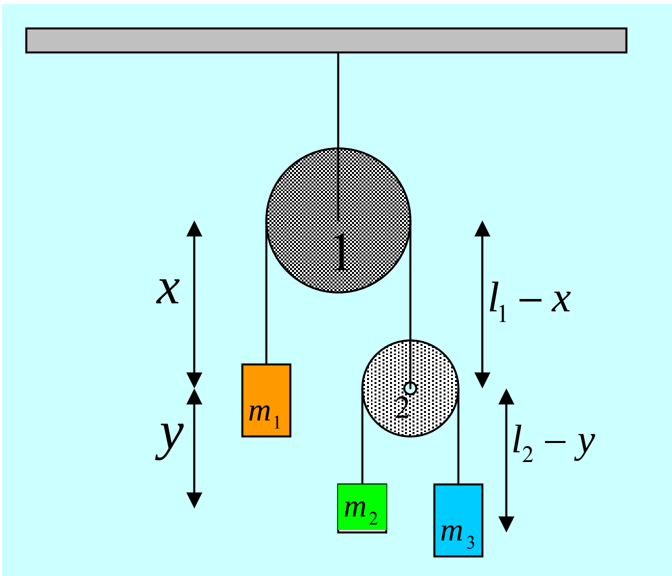
ب) تحرى قوة القيد.



الشكل (١١- ٤) خرزة تنزلق على سلك يدور في مستوى رأسي.

السؤال السادس:

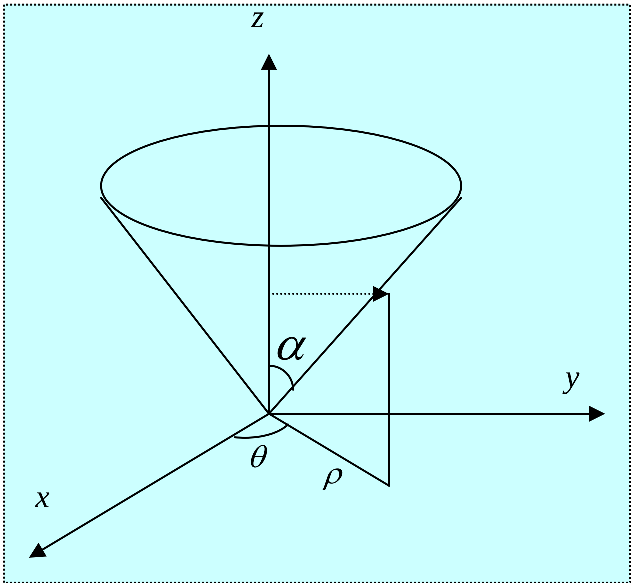
حدد معادلات الحركة للنظام الذي يتكون من بكرتين ملساويتين وثلاثة أجسام تتحرك كما في الشكل (١٢- ٤). أهمل كتلة الخيوط.



الشكل (١٢- ٤) نظام يتألف من بكرتين ملساويتين وثلاثة أجسام معلقة.

السؤال السابع:

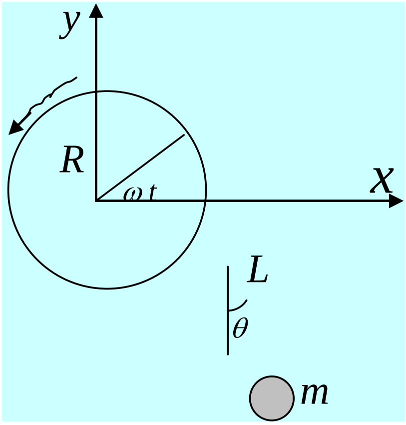
جسيم كتلته m مقيد الحركة على السطح الداخلي الأملس لمخروط زاويته α ، كما في الشكل (١٣- ٤). حدد الإحداثيات المعممة والقيود ، ثم اوجد معادلات لاجرانج للحركة إذا أثرت الجاذبية على الجسيم ؟



الشكل (١٣- ٤) جسيم مقيد الحركة على السطح الداخلي لمخروط.

السؤال الثامن:

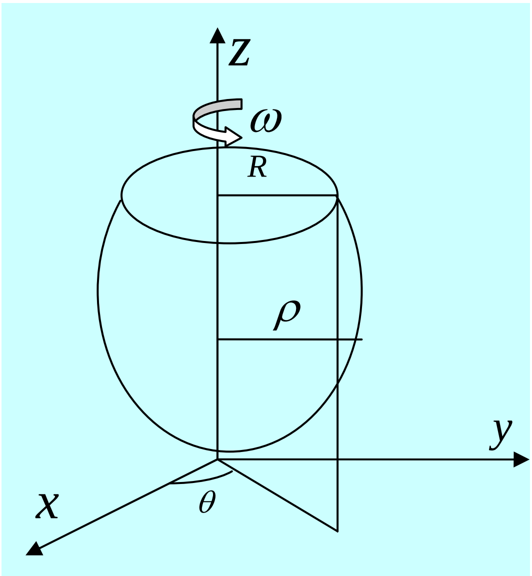
علق بندول بسيط طوله L بسلك دائري رفيع عديم الكتلة. نصف قطره R ، ويدور في مستوى رأسي بسرعة زاوية مقدارها ω. اوجد المركبات المتعامدة لسرعة وتسارع الجسم m والتسارع الزاوي، كما هو موضح في الشكل (١٤- ٤)؟



الشكل (١٤- ٤) بندول بسيط معلق بسلك دائري يدور في مستوى رأسي.

السؤال التاسع:

تتحرك خرزة على سلك عديم الاحتكاك مثني على شكل قطع زائد $z = c\rho^2$ أنظر الشكل (١٥- ٤)، تدور الخرزة في دائرة نصف قطرها R ، عندما يدور السلك حول محور تماثله العمودي z بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ω . اوجد قيمة c ؟



الشكل (١٥- ٤) خرزة تتحرك على سلك (شكله قطع زائد).

السؤال العاشر:

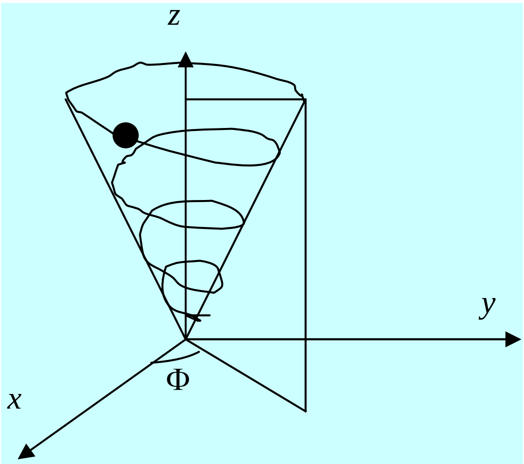
خرزة مقيدة الحركة على سلك أملس ملفوف لولبيا على شكل مخروط كما في الشكل (١٦- ٤). على افتراض أن $\rho = az$ و $\Phi = -bz$ حيث a و b ثابتان.

أ) اوجد دالة لاجرانج ؟

ب) اثبت أن معادلة الحركة تأخذ الشكل التالي :

$$\ddot{z}\left(a^2 + 1 + a^2 b^2 z^2\right) + a^2 b^2 z\,\dot{z}^2 = -g$$

ج) اوجد معادلات الحركة مستخدما مضاعفات لاجرانج ؟



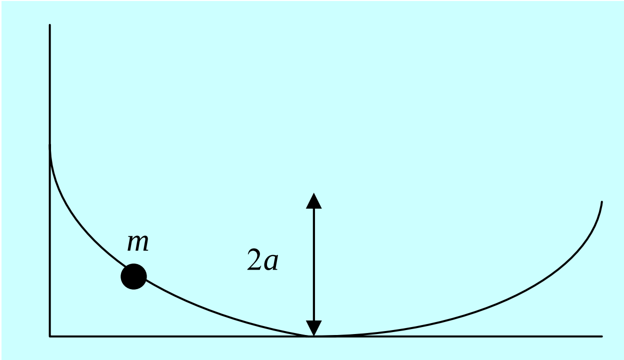
الشكل (١٦- ٤) خرزة مقيدة الحركة.

السؤال الحادي عشر:

تنزلق خرزة كتلتها m بدون احتكاك على سلك أملس شكله دويري كما في الشكل (١٧- ٤) المجاور حسب المعادلتين $(1+\cos\theta)$، $y = a$ ، $x = a(\theta - \sin\theta)$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$.

أ) ما هو عدد الإحداثيات المعممة ؟

ب) اوجد دالة لاجرانج ومعادلة الحركة للنظام ؟



الشكل (١٧- ٤) خرزة تنزلق على سلك أملس دويري الشكل.

السؤال الثاني عشر:

جسيم كتلته m يتحرك تحت تأثير طاقة وضع مقدارها $V(x) = -kx$ حيث k ثابت. إذا انتقل الجسيم من الموضع $x = 0$ إلى الموضع $x = a$ في زمن مقداره τ .

اوجد دالة الموضع بدلالة الزمن ؟

(٤,٩) المراجع

١- د. عقاب ربيع ،د. حسين العمري، ١٩٩٦"مقدمة في ميكانيكا لاجرانج و هاميلتون"، الطبعة الأولى، منشورات جامعة مؤتة. الأردن.

2- Marion, J.B. and Thornton, S.T., ”Classical Dynamics of Particles and System”, 3rd ed., Acadimic Press, 1988.

3- H. Goldstein, ”Classical Mechanics”, 2nd ed., Addison-Wesley, 1992.

4- L.D. Landau and E.M. Lifshits, ”Mechanics”, 3rd ed., Pergammon Press Ltd., 1976.

5- Fowles, G.R. and Cassiday, G.L., ”A Addison-Wesley nalytical Mechanics”, 5th ed., Saunders College Publishing, 1993.

6- A.D. Edward, ”Classical Mechanics”, 4th ed., John Wiley and Sons, 1996

7- E.N. Moore, ”Theoretical Mechanics”, 2nd ed., John-Wiley and Sons,1988.

معادلات هاميلتون

HAMILTONIAN EQUATIONS

• المقـدمة • الزخم المعمم والإحـداثيات الدورية
• قوانين الحفـظ • معادلات هاميلتون للحـركة
• القـوى المغناطيـسية وطاقـة الوضـع المعتمـدة علـى السـرعة • مسائل

(٥,١) المقدمة

معادلات هاميلتون، هي امتداد لمعادلات لاجرانج، وتوفر طريقة جديدة لصياغة معادلات الحركة، حيث إن معادلات هاميلتون هي معادلات تفاضلية عادية من الدرجة الأولى، بينما معادلات لاجرانج، هي عبارة عن معادلات تفاضلية عادية من الدرجة الثانية. إن التعامل مع معادلات هاميلتون قد يكون أسهل، لأنها معادلات تفاضلية عادية من الدرجة الأولى، وتكمن أهمية هذه المعادلات بشكل خاص في حقل ميكانيكا الكم.

(٥,٢) الزخم المعمم والإحداثيات الدورية

لقد عرفنا في الفصل السابق أن دالة لاجرانج هي عبارة عن دالة تعطى بدلالة الإحداثيات المعممة q_i والسرع المعممة $\dot{q}_i$. وفي هذا الفصل

سوف نتعرف على دالة مرادفة، وهي دالة هاميلتون التي تعطى بدلالة الإحداثيات المعممة q_i والزخم المعمم p_i الذي يعرف بالشكل التالي :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (5-1)$$

نحن نعرف أن معادلات لاجرانج تعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (5-2)$$

وباستخدام العلاقتين (١- ٥) و (٢- ٥) نحصل على :

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (5-3)$$

نستطيع الآن أن نلاحظ العلاقة بين ثوابت الحركة (Constants of Motion) و الزخم المعمم، حيث أن أي كمية معطاة بدلالة الإحداثيات والسرعات، وتبقى ثابتة مع تغير الزمن تسمى ثابت الحركة، وإذا افترضنا أن دالة لاجرانج L في نظام معين لا تحتوى على الإحداثي q_λ. أي أن :

$$\frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0 \qquad (5-4)$$

وباستخدام المعادلة (٣- ٥) نحصل على:

$$\dot{p}_\lambda = 0$$

$p_\lambda =$ثابت

إذا كانت دالة لاجرانج التي لا تحتوي على الإحداثي المعمم q_λ بصراحة (Explicitly) فإن الزخم المعمم المصاحب لهذا ألإحداثي المعمم يسمى ثابت الحركة، بينما ألإحداثي المعمم q_λ يسمى إحداثياً دورياً، وبعبارة أخرى

الـزخم المعمـم المـصاحب للإحـداثي الـدوري (cyclic coordinates) يكـون ثابت حركة.

فمثلا لإيجاد ثوابت الحركة والإحداثيات الدورية لجسيم يتحرك في مجال القوة المركزية، حيث تعطى دالة لاجرانج بالإحداثيات القطبية كما يلي:

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r)$$

في هذه الحالة L لا تحتوي على الإحداثي θ، ولذلك فإن θ إحداثي دوري والزخم المعمم المصاحب ل θ هو :

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = \text{ثابت}$$

حيث P_θ يمثل الزخم الزاوي وهو ثابت الحركة. وهـذا لا يعـني أن $\dot{\theta}$ ثابت حركة ولكنها تتغير وتتغير r بحيث يكون P_θ ثابتاً.

(٥,٣) قوانين الحفظ **Conservation Laws**

أي نظام لا يتفاعل مع المؤثرات الخارجية للنظام يسمى نظاماً مغلقاً (closed system). في مثل هذه الحالة يوجد سبع ثوابت حركة لهذا النظام المغلق :

أ) الزخم الخطي الذي يتمثل بثلاثة مركبات.

ب) الزخم الزاوي أيضاً و له ثلاثة مركبات.

جـ) الطاقة الكلية.

(٥,٣,١) حفظ الزخم المعمم

لقـد عرفنـا الـزخم المعمـم بالمعادلـة (١- ٥) واتـضح أن أي إحـداثي معـين مثـل q_λ لا يظهـر في دالـة لاجـرانج L يعـني أن الـزخم المعمـم p_λ

المصاحب لذلك الإحداثي يكون محفوظاً (أي ثابتاً لا يتغير مع الزمن)، ويمكن إعطاء التفسير الفيزيائي للزخم المعمم على النحو التالي:

إذا كان الإحداثي الذي لم يظهر في الدالة لاجرانج يمثل مسافة، فإن الزخم المحفوظ المصاحب لهذا الإحداثي زخما خطياً، وإذا كان يمثل الزاوية، فإن الزخم المحفوظ يكون زاوياً، وإذا كان الإحداثي لا يمثل مسافة أو زاوية – كما هو الحال في بعض النظم المعقدة- فإن الزخم يكون محفوظاً أيضاً، ولكن ليس من السهل تفسير معناه فيزيائيا ويسمى ثابت حركة فقط.

(٥,٣,٢) حفظ الطاقة ودالة هاميلتون

لا تعتمد دالة لاجرانج في النظام المغلق على الزمن بشكل صريح ونحن نعرف أن التفاضل الكلي لدالة لاجرانج يعطى بالعلاقة التالية:

$$dL = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} d\, q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\, \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (5-5)$$

ولكن النظام المغلق يعني أن:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad (5-6)$$

لذلك فإن المشتقة الزمنية الكلية للدالة L تعطى كما يلي :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\, \dot{q}_k}{dt}$$

أي أن:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \qquad (5-7)$$

ونحن نعرف من معادلة لاجرانج أن :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (5-8)$$

وبتعويض هذه المعادلة (٧- ٥) نحصل على :

$$\frac{dL}{dt}=\sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k+\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k$$

$$=\sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) \qquad (5-9)$$

أي أن :

$$\sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)-\frac{\partial L}{\partial t}=0 \qquad (5-10)$$

وبصيغة أخرى :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k \dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L\right)=0 \qquad (5-11)$$

وهذا يعني أن ما بداخل القوس هو كمية ثابتة وهذه الكمية تسمى دالة هاميلتون ويرمز لها بالرمز H ، وباستخدام تعريف الزخم المعمم نستطيع كتابة دالة هاملتون على الشكل :

$$H=\sum_k \dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L=\sum_k \dot{q}_k p_k-L=\text{ثابت}$$

نستطيع القول أن دالة هاميلتون H هي ثابت حركة إذا كانت دالة لاجرانج L لا تعتمد على الزمن بصراحة، أي أن :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

في النظام المحافظ أو في الحالة التي لا يعتمد فيها طاقة الوضع على السرعة يمكن كتابة الزخم المعمم كما يلي:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

لذلك تكتب دالة هاميلتون على الشكل :

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L \qquad (5-12)$$

لكن :

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k m\, \dot{q}_k^2 = 2T$$

وبالتعويض في المعادلة (١٢- ٥) نحصل على :

$$H = 2T - T + V = T + V = E$$

أي أن دالة هاميلتون هي مقدار ثابت يمثل الطاقة الكلية للنظام المحافظ. ومما تقدم نستنتج أنه إذا كانت دالة لاجرانج لا تعتمد على الزمن، فإن دالة هاميلتون تساوي مقدار ثابتا، وإذا كانت طاقة الوضع للنظام لا تعتمد على السرعة فإن دالة هاميلتون تساوي الطاقة الكلية للنظام.

(٥,٤) معادلات هاميلتون للحر كة

نحن نعرف أن دالة لاجرانج تعطى بدلالة الإحداثيات والسرع المعممة وقد تحتوي على الزمن بشكل صريح، أي أن:

$$L = L(q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n, q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n, t) \qquad (5-13)$$

إذا تفاضل L الكلي يعطي بالعلاقة التالية:

$$dL = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} d\, q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\, \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (5-14)$$

وباستخدام تعريف الزخم المعمم ومعادلة لاجرانج

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \; p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

يمكن كتابة تفاضل L على الشكل التالي :

$$dL = \sum_{k=1}^{n} (\dot{p}_k dq_k + p_k d\dot{q}_k) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (5-15)$$

وبإضافة الحد $\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k dp_k$ إلى طرفي المعادلة السابقة نحصل على :

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k dp_k + dL = \sum_{k=1}^{n} (\dot{p}_k dq_k + \dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

أي أن :

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k dp_k + dL = \sum_{k=1}^{n} (\dot{p}_k dq_k + d(\dot{q}_k p_k)) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (5-16)$$

وبإعادة ترتيب هذه المعادلة نحصل على :

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k p_k - L\right) = \sum_{k=1}^{n} (\dot{q}_k dp_k + \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (5-17)$$

يمكن كتابة دالة هاميلتون كما يلي :

$$H = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L \qquad (5-18)$$

لذلك تأخذ المعادلة(١٧- ٥) الشكل التالي :

$$dH = \sum_{k=1}^{n} (\dot{q}_k dp_k + \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (5-19)$$

وبما أن التفاضل الكلي لدالة هاميلتون يحتوي على التفاضل الكلي للزخم المعمم q_k والزمن t، ولا يحتوي على التفاضل الكلي للسرعة، فهذا يعني أن دالة هاميلتون يمكن أن تكتب بدلالة الإحداثيات q_k والزخم p_k و لا تعتمد هذه الدالة على السرعة، بعبارة أخرى، يمكن التعبير عن السرعة $\dot{q}_k$ بدلالة الزخم p_k وذلك باستخدام تعريف الزخم المعمم

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

إذن يمكن كتابة دالة هاميلتون كما يلي :

$$H = (q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n, t)$$

لذا فان التفاضل الكلي للدالة H يعطى بالعلاقة التالية :

$$dH = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (5-20)$$

وبمقارنة المعادلة (١٩- ٥) مع المعادلة (٢٠- ٥) نحصل على المعادلات الثلاث التالية :

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad (5-21)$$

$$\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (5-22)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (5-23)$$

وهذه المعادلات تسمى المعادلات الفيصلية للحركة (Canonical Equation of Motion) أو معادلات هاميلتون للحركة. كما يمكن كتابة المعادلة (٢٠- ٥) على الشكل التالي :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (5-24)$$

وباستخدام المعادلات (٢١- ٥)،(٢٢- ٥) و (٢٣- ٥) نحصل على :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (5-25)$$

إذا كانت دالة لاجرانج لا تحتوي على الزمن صراحة، فان دالة هامياتون كذلك لا تحتوي على الزمن صراحة، وهذا يعني أن :

$$\frac{dH}{dt} = 0 \qquad (5-26)$$

أي أن دالة هاميلتون في هذه الحالة تكون ثابت الحركة.

مثال (١-٥)

أوجد معادلات الحركة لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة، ثم جد دالة الإزاحة بدلالة الزمن، مستخدما طريقة هاميلتون؟

تعطى طاقة الحركة لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة بالعلاقة التالية $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$ وطاقة الوضع بالعلاقة $V = \frac{1}{2} kx^2$ فتكون دالة لاجرانج على النحو التالي :

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

ومن تعريف الزخم الخطي :

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

ومنها فان :

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

ومن المعادلة (١٨- ٥) نحصل على دالة هاميلنون التالية :

$$H = p_x\dot{x} - L = p_x\dot{x} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$H(p_x, x) = \frac{p_x^2}{m} - \frac{1}{2}m\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$H(p_x, x) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

وباستخدام المعادلات الفيصلية للحركة، نكتب معادلات الحركة على النحو التالي :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

نشتق المعادلة الأولى بالنسبة للزمن، ثم نعوض قيمة $\dot{p}_x$ من المعادلة الثانية، فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

وحلها يعطى بالعلاقة التالية :

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

حيث :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

مثال (٢-٥)

إذا علمت أن دالة لاجرانج لنظام ما هي:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - \frac{1}{2}kq_2^2$$

أوجد:

١- دالة هاميلتون H.

٢- الإحداثيات الدورية.

٣- معادلات هاميلتون والحل العام لها.

٤- اذكر ثوابت الحركة.

الحل:

١- باستخدام العلاقة(١٨- ٥) نحصل على:

$$H = \dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 + \dot{q}_3 p_3 - L$$

وباستخدام تعريف الزخم العام:

$$p_1 = m\dot{q}_1$$
$$p_2 = m\dot{q}_2$$
$$p_3 = m\dot{q}_3$$

أي أن :

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{m}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{p_2}{m}$$

$$\dot{q}_3 = \frac{p_3}{m}$$

نحن نعرف بان دالة هاميلتون هي دالة تعطى بدلالة الإحداثيات المعممة، والزخم المعمم، لذلك نعوض قيم $\dot{q}_1$ ، $\dot{q}_2$ ، $\dot{q}_3$ في دالة هاميلتون فنحصل على ما يلي:

$$H = \frac{p_1^2}{m} + \frac{p_2^2}{m} + \frac{p_3^2}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p_1^2}{m} + \frac{p_2^2}{m} + \frac{p_3^2}{m}\right) + \frac{1}{2}kq_2^2$$
$$= \left(\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m}\right) + \frac{1}{2}kq_2^2$$

٢- الإحداثيات الدورية هي q_1 و q_3 لأن :

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial q_3}$$

٣- معادلات هاميلتون للحركة مع الحل العام لها:

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{\dot{p}_1}{m} = 0$$

أي أن :

$$q_1 = c_1 t + c_2$$
$$p_1 = c_1 m$$

ومعادلات الحركة بالنسبة للإحداثي q_2 هي:

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m}$$
$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -kq_2$$

وببساطة نحصل على:

$$\ddot{q}_2 = \frac{\dot{p}_2}{m} = -\frac{k}{m} q_2$$

أي أن:

$$\ddot{q}_2 + \frac{k}{m} q_2 = 0$$

وحل هذه المعادلة هو: $q_2 = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ حيث $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

وبتعويض قيمة q_1 في المعادلة الثانية نحصل على :

$$\dot{p}_2 = -kA\cos\omega t - kB\sin\omega t$$

وبمكاملة طرفي المعادلة بالنسبة للزمن نجد :

$$p_2 = -\frac{kA}{\omega}\sin\omega t + \frac{kB}{\omega}\cos\omega t$$

و معادلات الحركة المقابلة للإحداثي المعمم q_3 هي:

$$\dot{q}_3 = \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3}{m}$$
$$\dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial q_3} = 0$$

إذن:

$$\ddot{q}_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q_3 = c_1't + c_2' \\ p_3 = mc_1' \end{cases}$$

٤- ثوابت الحركة p_1 و p_3 و H

$$\dot{p}_1 = 0 \quad , \quad \dot{p}_3 = 0$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

مثال(٣-٥)

استخدم طريقة هاميلتون لإيجاد معادلات حركة جسيم يتحرك على سطح أسطوانة معرفة بالمعادلة التالية :

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{R}^2$$

حيث يخضع هذا الجسيم لقوة باتجاه نقطة الأصل تتناسب طرديا مع بعد الجسيم عن نقطة الأصل

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

الحل :

طاقة الوضع المصاحبة لهذه القوة هي :

$$V = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}k\left(R^2 + z \quad\right)$$

نحن نعرف أن مربع السرعة في الإحداثيات الأسطوانية هو :

$$v^2 = \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$

لكـن في هـذا المثـال حركـة الجـسيم مقيـدة علـى سـطح الأسـطوانة أي أنّ: $\rho = R$ ، لذلك طاقة الحركة تعطى بالعلاقة التالية :

$$T = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

إذن دالة لاجرانج:

$$L = \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \right) - \frac{1}{2} k \left(R^2 + z^2 \right)$$

الإحـداثيات المعممّـة هـي θ و z ، والزخـوم المعممّـة المـصاحبة لهـذه الإحداثيات p_θ و p_z يمكن إيجادهما بدلالة $\dot{\theta}$ و $\dot{z}$ كما يلي :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR\dot{\theta}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

وباستخدام العلاقة (١٨- ٥) نحصل على دالة هاميلتون H

$$H = p_\theta \dot{\theta} + p_z \dot{z} - \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\theta} + \dot{z}^2 \right) + \frac{1}{2} k \left(R^2 + z^2 \right)$$

وبتعويض قيمة $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$ وقيمة $\dot{z} = \frac{p_z}{m}$ في هذه الدالة نحصل على :

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} k \left(R^2 + z^2 \right)$$

و باستخدام معادلات هاميلتون، نحصل على معادلات الحركة لهذا النظام وهي كما يلي :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

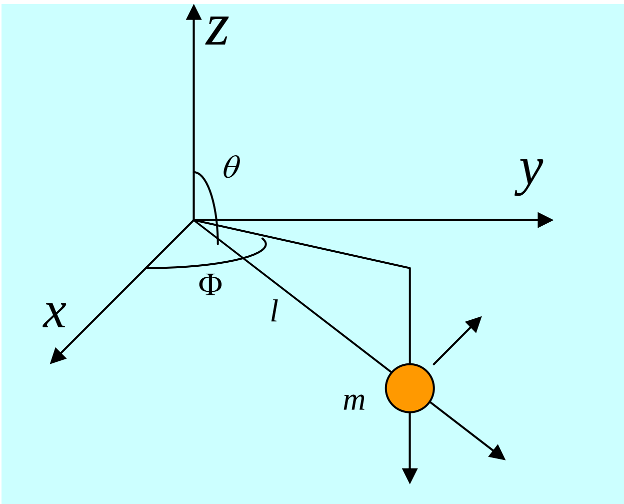
$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz$$

ونستنتج من المعادلات السابقة أن الزخم الزاوي حول المحور z ، هو كمية ثابتة ، والحركة في اتجاه المحور z ، هي حركة توافقية بسيطة.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{حيث} \quad \ddot{z} = -\frac{k}{m} z \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \omega^2 z = 0$$

مثال (٤-٥)

في الشكل (١- ٥) بندول كروي طوله l وكتلته m. اوجد معادلات هاميلتون لهذا البندول الكروي.



الشكل (١- ٥) بندول مركب.

الحل:

طاقة الحركة في الإحداثيات الكروية هي :

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2\right)$$

لكن:

$$\dot{r} = 0 \quad , \quad r = l$$

إذن:

$$T = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2\right)$$

الإحداثيات المعممة هي : θ و ϕ

إذا اعتبرنا نقطة تعليق البندول هي نقطة الأصل، فان طاقة الوضع هي :

$$V = mgl\cos\theta$$

حيث أن القوة الوحيدة التي تؤثر على البندول هي قوة الجاذبية الأرضية، نستطيع الآن كتابة دالة لاجرانج كما يلي :

$$L = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2\right) + mgl\cos\theta$$

لذلك:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}$$

من هاتين المعادلتين نستطيع تحديد قيم $\dot{\theta}$ و $\dot{\phi}$ بدلالة p_θ و p_ϕ ونجد دالة هاميلتون (H) كما يلي :

$$H = p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2\theta} - mgl\cos\theta$$

تحسب معادلات الحركة كما سيتضح من المعادلات التالية :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2\theta}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{ml^2 \sin^3\theta} - mgl\sin\theta$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

حيث ϕ إحداثي دوري والزخم p_ϕ هو ثابت حركة.

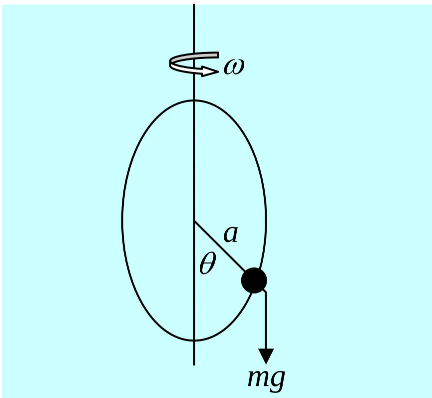
مثال (٥-٥)

خرزة كتلتها m تنزلق بدون احتكاك على حلقة دائرية نصف قطرها a ، تقع الحلقة في المستوى الرأسي، وهي مقيدة الحركة لتدور حول قطرها العمودي كما في الشكل (٢- ٥) بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ω.

جد :

أ) دالة هاميلتون

ب) معادلات الحركة الفيصلية.



الشكل (٢- ٥) خرزة تنزلق على حلقة.

الحل :

سنعتمد هنا الإحداثيات الكروية، لأن الحلقة تدور، لذلك طاقة الحركة

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right)$$

لكن $r=a$ و $\dot{r}=0$ وبما أن الحلقة تدور بسرعة زاوية ثابتة، إذاً $\dot{\phi}=\omega$

أي أن:

$$T=\frac{1}{2}\left(a^2\dot{\theta}^2+a^2\sin^2\theta\,\omega^2\right)$$

وطاقة الوضع هي :

$$V=-mg\,a\cos\theta$$

فتكون دالة لاجرانج كما يلي :

$$L=\frac{1}{2}m\left(a^2\dot{\theta}^2+a^2\omega^2\sin^2\theta\right)+mg\,a\cos\theta$$

لدينا إحداثي معمم واحد θ.

لذلك تحسب دالة هاميلتون كما يلي :

$$H=\dot{\theta}\,p_\theta-L$$

حيث :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\,a^2\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\,a^2}$$

وبتعويض قيمة $\dot{\theta}$ في دالة هاميلتون نجد

$$H = \frac{p_\theta^2}{m\,a^2} - \frac{1}{2}m\,a^2\frac{p_\theta^2}{m^2a^4} - \frac{1}{2}m\,a^2\omega^2\sin^2\theta - mg\,a\cos\theta$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2m\,a^2} - \frac{1}{2}m\,a^2\omega^2\sin^2\theta - mg\,a\cos\theta$$

معادلات الحركة هي :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\,a^2}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

$$\dot{p}_\theta = m\,a^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mg\,a\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{p}_\theta}{m\,a^2} = \omega^2\sin\theta\cos\theta - \frac{g}{a}\sin\theta$$

إذا كانت θ صغيرة جدا ، فان $\sin\theta \approx \theta$ و $\cos\theta \approx 1$ أي أن :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \omega\right)\theta = 0$$

(٥,٥) القوى الكهرومغناطيسية وطاقة الوضع المعتمدة على السرعة

سندرس هنا الأنظمة الديناميكية المتأثرة بقوى تعتمد على السرعة، أي أن طاقة الوضع تكون دالة بدلالة الإحداثيات والسرعة، حيث أن مثل هذه الدالة يمكن إيجادها من المعادلة التالية :

$$Q_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} \;,\; k = 1,2,3,....,n \qquad (5-27)$$

وبالتالي دالة لاجرانج تأخذ الشكل التالي:

$$L = T - U \qquad (5-28)$$

ومعادلة الحركة هي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \;,\; k = 1,2,....,n \qquad (5-29)$$

وبدراسة حالة جسيم مشحون بشحنة مقدارها q ، خاضع لقوة كهرومغناطيسية معطاة بالعلاقة التالية :

$$\vec{F} = q\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right\}$$

التي تسمى قوة لورنتز حيث $\vec{E}$ المجال الكهربائي و $\vec{B}$ المجال المغناطيسي، فيمكن إيجاد دالة هاميلتون كالآتي:

إن معادلات ماكسويل (Maxwell Equations) في وحدات جاوس تكتب كما يلي :

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=4\pi\rho$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

وبما أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ إذاً $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ حيث $\vec{A}$ الجهد المغناطيسي المتجهي (Magnetic Vector Potential) وبتعويض قيمة $\vec{B}$ في معادلة ماكسويل، نحصل على :

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

وهذا يعني أن :

$$\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\Phi$$

حيث :

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Phi=0$$

إذن :

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

وبالتعويض في معادلة لورنتز نحصل على :

$$\vec{F}=q\left\{-\vec{\nabla}\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\right\}$$

لنأخذ بعين الاعتبار المركبة السينية (x)

$$\vec{F}_x = q\left\{-\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_x}{\partial t} + \frac{1}{c}\left(\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_x\right\}$$

لكن :

$$\left(\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_x = \dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

وبطرح وإضافة الحد $\dot{x}\dfrac{\partial A_x}{\partial x}$ للمعادلة السابقة نحصل على :

$$\left(\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_x = \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} - \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} - \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}$$

وبما أن :

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

إذن :

$$-\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} - \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} = -\frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

وبعد ذلك نحصل على :

$$\begin{aligned}\left(\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{y}A_y + \dot{z}A_z + \dot{x}A_x\right) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\end{aligned}$$

وبتعويض هذه القيمة في المركبة السينية للقوة F_x نحصل على :

$$F_x = q\left\{-\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right) - \frac{1}{c}\frac{dA_x}{dt}\right\}$$

ويمكن كتابة هذه المركبة على الصورة :

$$F_x = q\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}-\Phi\right)-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right)\right\}$$

حيث :

$$\vec{v}\cdot\vec{A} = \dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z$$

وبما أن:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} = 0$$

إذن نستطيع كتابة F_x كما يلي :

$$F_x = q\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi-\frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right)+\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\Phi-\frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right\}\right]$$

ونحن نعرف من المعادلة (٢٧- ٥) أن :

$$F_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial U}{\partial x}$$

إذن بالمقارنة نجد :

$$U = q\Phi - \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}$$

وباستخدام المعادلة(٢٨- ٥) نحصل على دالة لاجرانج

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-q\Phi+\frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}$$

هنا الطاقة الحركية تساوي :

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)$$

وباستخدام تعريف الزخم الخطي المعمم نحصل على :

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{x} + \frac{q}{c}A_x$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\,\dot{y} + \frac{q}{c}A_y$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\,\dot{z} + \frac{q}{c}A_z$$

لكن دالة هاميلتون تعطى بالعلاقة التالية :

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L$$

وبتعويض قيم $\dot{x}\,,\,\dot{y}\,,\,\dot{z}$ في هذه الدالة نجد :

$$H = p_x\left(\frac{p_x - \frac{q}{c}A_x}{m}\right) + p_y\left(\frac{p_y - \frac{q}{c}A_y}{m}\right) + p_z\left(\frac{p_z - \frac{q}{c}A_z}{m}\right)$$

$$-\frac{1}{2}m\left\{\frac{\left(p_x - \frac{q}{c}A_x\right)^2}{m^2} + \frac{\left(p_y - \frac{q}{c}A_y\right)^2}{m^2} + \frac{\left(p_z - \frac{q}{c}A_z\right)^2}{m^2}\right\}$$

$$-\frac{q}{c}A_x\left(\frac{p_x - \frac{q}{c}A_x}{m}\right) - \frac{q}{c}A_y\left(\frac{p_y - \frac{q}{c}A_y}{m}\right) - \frac{q}{c}A_z\left(\frac{p_z - \frac{q}{c}A_z}{m}\right) + q\,\Phi$$

وبتجميع الحدود نحصل على الصورة التالية :

$$H = \frac{\left(p_x - \frac{q}{c}A_x\right)^2}{2m} + \frac{\left(p_y - \frac{q}{c}A_y\right)^2}{2m} + \frac{\left(p_z - \frac{q}{c}A_z\right)^2}{2m} + q\,\Phi$$

والتي يمكن كتابتها كما يلي :

$$H=\frac{\left(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2m}+q\Phi$$

(٦,٥) مسائل

السؤال الأول:

جسيم كتلته m يجذب بقوة مقدارها $\frac{k}{r^2}$ حيث k ثابت، نحو نقطة محددة. اوجد دالة هاميلتون ومعادلات الحركة. استخدم الإحداثيات القطبية ؟

السؤال الثاني:

أعد حل السؤال السابق باستخدام الإحداثيات المتعامدة.

السؤال الثالث :

سقط جسيم كتلته m سقوطا حرا تحت تأثير الجاذبية الأرضية. اوجد دالة هاميلتون ومعادلات الحركة ودالة الموضع بدلالة الزمن ؟

السؤال الرابع:

جسيم كتلته m يتحرك في ثلاثة أبعاد تحت تأثير الجاذبية الأرضية. جد معادلات الحركة باستخدام دالة هاميلتون، ثم حدد الإحداثيات الدورية واذكر ثوابت الحركة ؟

السؤال الخامس:

قضيب منتظم كتلته M وطوله $2l$ و علق أحد طرفية بواسطة زنبرك ثابت مرونته k. إذاً تأرجح القضيب في المستوى العمودي والزنبرك مقيد

الحركة في الاتجاه العمودي. جد دالة هاميلتون لهذا النظام وحدد معادلات الحركة ؟

السؤال السادس:

يتحرك جسيم تحت تأثير قوة تؤثر باتجاه المركز قيمتها تعطى بالعلاقة التالية :

$$F = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2}\right)$$

حيث r بعد الجسم عن مركز القوة. جد دالة هاميلتون لهذا الجسيم ؟

(٥,٧) المراجع

1- E.N. Moore, ”Theoretical Mechanics”, 2nd ed., John-Wiley and Sons, 1988.

2- Fowles, G.R. and Cassiday, G.L., ”A Addison-Wesley nalytical Mechanics”, 5th ed., Saunders College Publishing,1993.

3- Sears, Zemansky, ”University Physics”,10th ed., Addison-Wesley, 2000.

4- H. Goldstein, ”Classical Mechanics”, 2nd ed., Addison-Wesley, 1992.

5- L.D. Landau and E.M. Lifshits, ”Mechanics”, 3rd ed., Pergammon Press Ltd., 1976.

6- Keith Symon, ”Mechanics”, 3rd ed., Addison-Wesley, 1992.

7- R.A. Matzner and L.C. Shepley, ”Classical Mechanics”, 4th ed., Prentice-Hall Inc.,1991.

8- A.D. Edward, ”Classical Mechanics”, 4^{th} ed., John Wiley and Sons, 1996

9- S.Thornton and J. Marion, ”Classical Dynamics”, 4^{th} ed., Thomson Books, 2004.

حساب التغاير

CALCULUS OF VARIATIONS

• المقدمة • بعض الأساليب التقنية في حساب التغاير • المتغيرات متعددة التوابع • مبدأ هاميلتون • مسائل

(٦,١) المقدمة

يستخدم حساب التغاير وتفرعاته لإيجاد الدوال المثلى والتي تعطي أفضل " ألقيم الاقتصادية" وتحقق اشتراطات النظام والقيود الموضوعة عليه. وتظهر الحاجة للدوال المثلى بدلا من النقط المثلى في الفيزياء في العديد من المسائل الفيزيائية، والتي منها البصريات والمرونة والاهتزازات وعلم توازن القوى وديناميكا الأجسام الصلبة. سيتم في هذا الباب القصير استعراض مبسط لبعض من المفاهيم الرئيسية في هذا الموضوع. والتي تتضمن إيجاد القيم القصوى لتكامل دالة بين نقطتين، ومعادلة اويلر Euler لحالة متغير وحالة عدة متغيرات. ومن ثم سيتم التطرق لمبدأ هاميلتون.

(٦,٢) بعض الأساليب التقنية في حساب التغاير

هناك بعض المسائل التي تطرح في مجال الفيزياء الرياضية وهي:

إذا كان لدينا دالة F معرفة بدلالة المتغير المستقل x والمتغير التابع y ومشتقاته $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ أي أن:

$$F \equiv F\left(x \;, \; y \;, \frac{dy}{dx}\right) \qquad (6-1)$$

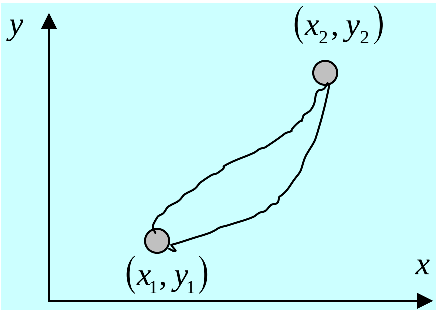
فكيف يمكن تحديد المنحنى الذي يصل بين النقطتين $x = x_1$ و $x = x_2$، والذي يربط بين المتغيرين y و x ؟ أي:

$$y = y(x) \qquad (6-2)$$

مثل هذه المسألة يمكن حلها بتعريف التكامل التالي:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\; dx \qquad (6-3)$$

بحيث يكون لهذا التكامل قيمة عظمى أو صغرى (قيمة قصوى Stationary value).



الشكل (١- ٦) مسارات متباينة بين نقطتين ثابتتين.

المنحنى (١- ٦) يسمى منحنى نهاية قصوى (عظمى أو صغرى) والشرط الضروري لكي تكون لهذا التكامل نهاية عظمى أو نهاية صغرى هو: أن يكون التغاير لهذا التكامل مساويا للصفر. لنعتبر فقط

المسارات المتغيرة بحيث $y(x_1)=y_1$ و $y(x_2)=y_2$. ونستطيع تركيب الدالة التي تمثل هذه المنحنيات المتغيرة بالطريقة التالية:

لنفرض أن $\eta(x)$ هي دالة معطاة بدلالة x بحيث تكون قيمتها صفرا عند النقطتين x_1 و x_2 ومشتقاتها الثانية متصلة على الفترة $[x_2 , x_1]$ ، واختيارية في أي مكان آخر. يمكننا الآن تعريف الدالة بالمعادلة التالية:

$$Y(x)=y\quad(x)+\varepsilon\eta\quad(x) \qquad (6-4)$$

حيث $y(x)$ المنحنى الذي يحتوي على القيمة القصوى و ε هي مقدار صغير جدا. وباشتقاق المعادلة (٤- ٦) نحصل على:

$$Y'(x)=y'(x)+\varepsilon\eta\quad(x) \qquad (6-5)$$

إذن نستطيع كتابة التكامل $I(\varepsilon)$ كما يلي:

$$I(\varepsilon)=\int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y')\ \ dx \qquad (6-6)$$

حيث Y و Y' دوال بدلالة ε . وحتى يكون لهذا التكامل قيم قصوى يجب أن تتحقق المعادلة التالية:

$$\frac{d\ I(\varepsilon)}{d\varepsilon}=0$$

عندما $\varepsilon=0$.

وباشتقاق المعادلة (٦- ٦) نحصل على:

$$\frac{d\quad I(\varepsilon)}{d\,\varepsilon}=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial\quad F}{\partial\quad Y}\frac{d\,Y}{d\,\varepsilon}+\frac{\partial\quad F}{\partial Y'}\frac{d\,Y'}{d\,\varepsilon}\right)\ dx \qquad (6-7)$$

وبتعويض (٤- ٦) و(٥- ٦) في (٧- ٦) نحصل على:

$$\frac{d \quad \mathrm{I}(\varepsilon)}{d \quad \varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \quad F}{\partial \mathrm{Y}} \eta(x) + \frac{\partial \quad F}{\partial \mathrm{Y}'} \eta'(x) \right] \quad dx \qquad (6-8)$$

عندما $\varepsilon = 0$ فإن $\mathrm{Y} = y$ وهذا يؤدي إلى :

$$\left\{ \frac{d \quad \mathrm{I}(\varepsilon)}{d \varepsilon} \right\}_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \quad F}{\partial y} \quad \eta \quad (x) + \frac{\partial \quad F}{\partial y'} \quad \eta' \quad (x) \right] \quad dx = 0 \qquad (6-9)$$

وإذا كانت y'' متصلة ، نستطيع مكاملة الحد الثاني بالأجزاء كما يلي:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \quad F}{\partial y'} \quad \eta' \quad (x) \quad dx = \frac{\partial \quad F}{\partial y'} \quad \eta \quad (x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \quad F}{\partial y'} \right) \eta \quad (x) \quad dx = 0 \qquad (6-10)$$

لكن:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

إذن:

$$\left\{ \frac{d \quad \mathrm{I}(\varepsilon)}{d \varepsilon} \right\}_{\varepsilon=0} = \int_{x_2}^{x_1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} \eta \quad (x) \quad dx = 0 \qquad (6-11)$$

وبما أن $\eta(x)$ هـي دالـة اختياريـة بدلالـة x لا يمكـن أن تكـون دائمـا صفراً ، إذن:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \quad F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial \quad F}{\partial y} = 0 \qquad (6-12)$$

وتسمى هذه المعادلة **بمعادلة أويلر** (Euler equation)

يمكن حل أية مسألة في حساب التغاير بتحديد التكامل (٦- ٦) ومعرفة الدالة F بحيث يكون لهذا التكامل قيم قصوى ومن ثم نعوض هذه الدالة في المعادلة (١٢- ٦) ونجد نتيجة هذه المعادلة التفاضلية.

مثال(١-٦)

أوجد أقصر مسافة بين نقطتين في المستوى xy باستخدام حساب التغاير ؟

الحل:

إن عنصر الطول القوسي (Element of Arc Length) في المستوى xy يعطى بالمعادلة:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx = \sqrt{1 + y'^2}\ dx$$

حيث: $\frac{dy}{dx} = y'$

والطول الكلي بين أي نقطتين هو:

$$\mathrm{I} = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\ dx \equiv \int_{x_1}^{x_2} F\ dx$$

حيث $F = \sqrt{1 + y'^2}$. وحتى يكون للمسار قيمة صغرى (أقصر مسار) يجب على الدالة أن تحقق معادلة أويلر (١٢- ٦). إذن:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

وبالتعويض في المعادلة (١٢- ٦) نحصل على:

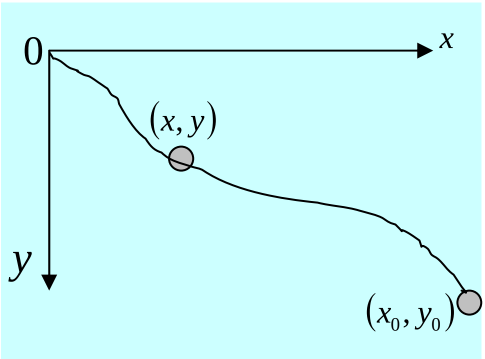
$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \quad \text{أو} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0$$

حيث c ثابت. وهذا الحل يكون مقبولا إذا كانت $y' = a$

حيث a ثابت بدلالة c أي أن $a=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$ وبمكاملة المعادلة $y'=a$ بالنسبة ل x نحصل على $y=ax+b'$ حيث b ثابت آخر، وهذا يعني أن أقصر مسافة بين نقطتين هي خط مستقيم.

مثال (٢-٦)

ينزلق جسم (خرزة) من السكون من نقطة ما على سلك أملس يقع في مستوى رأسي إلى نقطة أخرى بتأثير الجاذبية الأرضية. أنظر الشكل (٢- ٦). اوجد معادلة المنحنى الذي يحدد شكل السلك بحيث يكون الزمن اللازم لقطع المسافة أقل ما يمكن ؟



الشكل (٢- ٦) خرزه تنزلق على سلك أملس.

الحل:

لنفرض أن نقطة البداية هي نقطة الأصل ونقطة النهاية هي $(x_0\ ,\ y_0)$ ، لنعتبر أن الجسم عند النقطة $(x\ ,\ y)$ ، حيث تكون سرعته اللحظية عند الزمن t هي : $\frac{ds}{dt}$ ، حيث الطول القوسي يساوي s . وباستخدام مبدأ حفظ الطاقة نحصل على المعادلة التالية:

$$mg\,y = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

على افتراض أن طاقة وضع الجسم تساوي صفراً عند نقطة الأصل. ومنها نحصل على:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g\,y}} \quad \text{أو} \quad ds = \sqrt{2g\,y}\,dt$$

والزمن الكلي τ اللازم لانزلاق الجسيم من $y = 0$ إلى $y = y_0$ هو:

$$\tau = \int_0^{\tau} dt = \int_{y=0}^{y_0} \frac{ds}{\sqrt{2g\,y}}$$

لكن من المثال السابق تبين أن $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ إذن :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y=0}^{y_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y=0}^{y_0} F dx$$

حيث:

$$F = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$$

وحتى يكون للزمن قيمة قصوى (صغرى) يجب أن تحقق الدالة F معادلة أويلر:

$$F = \left(1 + y'^2\right)^{\frac{1}{2}} (y)^{\frac{-1}{2}}$$

ومنها:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \left(1 + y'^2\right)^{\frac{-1}{2}} y' y^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{-1}{2}\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}y^{\frac{-3}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1+y'^2\right)^{\frac{-1}{2}}y'y^{\frac{-1}{2}}\right]+\frac{1}{2}\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}y^{\frac{-3}{2}}=0$$

وباشتقاق ما بداخل القوس الكبير نجد أن:

$$\left(1+y'^2\right)^{\frac{-1}{2}}\left[y''y^{\frac{-1}{2}}-\frac{1}{2}y'^2y^{\frac{-3}{2}}\right]-\left(1+y'^2\right)^{\frac{-3}{2}}y'^2y''y^{\frac{-1}{2}}+\frac{1}{2}\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}y^{\frac{-3}{2}}=0$$

وبإعادة ترتيب حدود هذه المعادلة نحصل على:

$$y''y^{\frac{-1}{2}}(1+y'^2)^{\frac{-1}{2}}\left[1-(1+y'^2)^{-1}y'^2\right]+\frac{1}{2}y^{\frac{-3}{2}}(1+y'^2)^{\frac{-1}{2}}\left[-y'^2+(1+y'^2)\right]=0$$

أي أن:

$$y''y^{\frac{-1}{2}}(1+y'^2)^{\frac{-3}{2}}+\frac{1}{2}y^{\frac{-3}{2}}(1+y'^2)^{\frac{-1}{2}}=0$$

نضرب طرفي المعادلة السابقة بالمقدار:

$$2\,y^{\frac{+3}{2}}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

فنحصل على المعادلة التالية:

$$y'^2+2y\,y''+1=0$$

إذن المنحنى الذي يحقق هذه المعادلة التفاضلية، هو الطريق الذي يوصل الجسيم إلى النقطة $(x_0\,,\,y_0)$ بأقل زمن ممكن.

مثال (٣-٦)

اوجد الجيوديسية (geodesics) (أي اقصر خط بين نقطتين على سطح معين) على الأسطوانة $r = 1 + \cos\theta$.

الحل:

في الإحداثيات الاسطوانية $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$ وبما أن $r = 1 + \cos\theta$ فإن:

$$dr = -\sin\theta \, d\theta$$

بتعويض قيمة كل من dr و r في معادلة الإحداثيات الاسطوانية فنحصل على:

$$ds^2 = \sin^2\theta \, d\theta^2 + (1 + \cos\theta)^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$= 2(1 + \cos\theta) \, d\theta^2 + dz^2$$

نجد القيمة الصغرى للتكامل $\int ds$ حتى نحسب الجيوديسية (أي اقصر خط بين نقطتين على سطح الاسطوانة). أي أن:

$$\int ds = \int \sqrt{2(1 + \cos\theta) d\theta^2 + dz^2}$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{2(1 + \cos\theta) + z'^2} \quad d\theta$$

حيث :

$$z' = \frac{dz}{d\theta}$$

إذن الدالة F تعطى بالعلاقة التالية:

$$F = \sqrt{2(1 + \cos\theta) + z'^2}$$

ومعادلة أويلر هي:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial F}{\partial Z}=0$$

وبتعويض قيمة F فإن:

$$k=\frac{z'}{\sqrt{2(1+\cos\theta)+z'^2}}$$

وبتربيع طرفي المعادلة نحصل على:

$$z'^2=k^2\left(2+2\cos\theta+z'^2\right)$$

أي أن:

$$z'^2=\frac{2k^2}{1-k^2}(1+\cos\theta)$$

$$z'^2=A^2\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)$$

حيث:

$$\frac{A^2}{2}=\frac{2k^2}{1-k^2}$$

إذن وبصيغة أخرى:

$$z'^2=A^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

وبكاملة طرفي المعادلة نجد أن:

$$z=c+2A\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

وهذا يعني أن الجيوديسية عبارة عن منحنيات تقاطع السطح $z = c + 2A\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ مع الاسطوانة المعطاة $r = 1+\cos\theta$.

مثال (٤-٦)

أوجد معادلة المسار الذي يسلكه الشعاع الضوئي في وسط معامل انكساره يتناسب مع $r^{-1/2}$.

الحل:

نجد القيم القصوى للتكامل التالي:

$$\int r^{-1/2} ds = \int r^{-1/2} \sqrt{d r^2 + r^2 d\theta^2}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} r^{-1/2} \sqrt{1 + r^2 \theta'^2}\ dr$$

حيث:

$$\theta' = \frac{d\theta}{dr}$$

إذن:

$$F = \sqrt{\frac{1 + r^2 \theta'^2}{r}}$$

ومعادلة اويلر هي:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

نعوض قيمة F فنحصل على:

$$k=\frac{r^2\theta'}{\sqrt{r\left(1+r^2\theta'^2\right)}}$$

بتربيع طرفي المعادلة نجد أن:

$$r^3\theta'^2=k^2\left(1+r^2\theta'^2\right)$$

$$k^2=r^2\theta'^2\left(r-k^2\right)$$

أي أن: $\theta'=\dfrac{k}{r\sqrt{r-k^2}}$

وهذا يؤدي إلى أن: $d\theta=\dfrac{k\,dr}{r\sqrt{r-k^2}}$

وبمكاملة طرفي المعادلة نجد أن: $\theta=k\displaystyle\int\frac{dr}{r\sqrt{r-k^2}}+c$

حيث c ثابت. ومنها: $\theta=2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{r-k^2}{k^2}}$

(٦,٣) المتغيرات متعددة التوابع

(Several Dependent Variables

ليس من الضروري أن نحصر دراستنا في حساب التغاير على المسائل التي تحتوي على متغير معتمد واحد مثل y ، بل من الممكن أن نوسع دراستنا لتشتمل على المسائل التي تحتوي عدة متغيرات معتمدة. في حساب المسائل العادية فإن الشرط الضروري لتكون النقطة قيمة صغرى على المنحنى $z(x)$ هو أن تكون المشتقة الأولى بالنسبة ل x مساوية للصفر، $\dfrac{dz}{dx}=0$ أما بالنسبة للدوال التي تحتوي على أكثر من متغير $z=z(x,y)$ ، فيوجد شرطان هما : $\dfrac{dz}{dx}=0$ و $\dfrac{dz}{dy}=0$ ونستخدم نفس الأسلوب في حساب التغاير.

لنفرض أن الدالة F معطاة بدلالة y ، z ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{dz}{dx}$ و x . نريد الآن الحصول على منحنيين $y = y(x)$ و $z = z(x)$ يجعلان التكامل التالي:

$$I = \int F \ dx$$

حاويا على قيم قصوى. لذلك سيعتمد التكامل على كل من $y = y(x)$ و $z = z(x)$ ، وفي هذه الحالة يوجد عندنا معادلتان ل أويلر إحداهما للمتغير y ، والأخر للمتغير z ، وبشكل مفصل نكتب المعادلتين كما يلي :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (6-14a)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (6-14b)$$

ومن الممكن تعميم ذلك على المسائل التي تحتوي على عدد n من المتغيرات التابعة بحيث يكون في هذه الحالة لدينا n من معادلات أويلر.

(٦,٤) مبدأ هاميلتون **Hamilton's Principle**

ينص هذا المبدأ على أن جسيما أو نظاما من الجسيمات تتحرك إذا كان للتكامل :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L \ \ dt \qquad (6-15)$$

قيمة أو قيم قصوى. علما بأن L هي دالة لاجرانج وتعطى بالعلاقة التالية:

$$L = T - V$$

حيث T طاقة الحركة و V طاقة الوضع للجسيم أو النظام. في الفصل الثاني قمنا باشتقاق معادلات لاجرانج آخذين بعين الاعتبار حالة لحظية

للنظـام (t) وذلـك باسـتخدام مبـادئ التفاضـل. ومـن الممكـن كـذلك أن نحـصل علـى معـادلات لاجـرانج باسـتخدام مبـدأ هـاميلتون وذلـك بـإجراء التكامل من اللحظة الزمنية t_1 إلى اللحظة t_2 كما في المعادلة (١٥- ٦). وبشكل عام، فإن دالة لاجرانج تعطى بدلالة q_k و $\dot{q}_k$ و t.

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

أي أن:

$$\mathrm{I} = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt$$

هذه المعادلة هي نفس المعادلة (٣- ٦) ولكن هنا عملنا الانتقالات التالية:

$$y' \to \dot{q}_k \quad F \to L$$
$$x \to t \qquad y \to q_k$$

لذلك نحصل على معادلات أويلر بنفس الطريقة التي عرضناها في بداية الفصل، أي أن:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

(٦,٥) مسائل

السؤال الأول:

أوجد معادلة المسار الذي يسلكه شعاع ضوئي في وسط معامل انكساره n يتناسب مع r^{-2} (الإحداثيات القطبية)؟

السؤال الثاني:

اوجد التكامل الأول لمعادلة أويلر بحيث يكون للتكامل التالي قيمة قصوى ؟

$$I=\int\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx \quad , \quad y'=\frac{dy}{dx}$$

السؤال الثالث:

باستخدام الإحداثيات الاسطوانية جد الجيوديسية (geodesics) أي اقصر خط بين نقطتين على سطح المخروط ؟.

$$z^2=8\left(x^2+y^2\right)$$

$$r\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{3}\right)=k$$

السؤال الرابع:

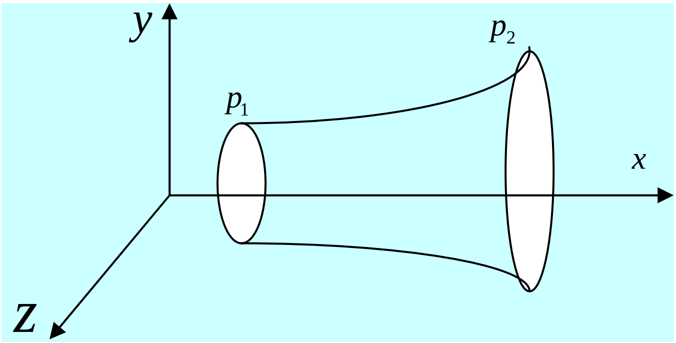
اوجد معادلة المسار الذي يسلكه الشعاع الضوئي إذا كان معامل الانكسار يتناسب مع $\sqrt{y}$.

السؤال الخامس:

أوجد الجيوديسية (geodesics) أي اقصر خط بين نقطتين على سطح الكرة.

السؤال السادس:

إذا رسمنا منحنى يصل بين النقطتين p_1 و p_2 ، ودار هذا المنحنى حول المحور x بحيث يشكل سطحا دورانياً كما في الشكل (٣- ٦)، جد معادلة هذا المنحنى بحيث تكون مساحة السطح أقل ما يمكن ؟.



الشكل (٣- ٦) منحنى يصل بين النقطتين p_1 و p_2 ومدار حول المحور x.

السؤال السابع:

أوجد القيم القصوى للدالة التالية ؟

$$\mathrm{I}\{y(x), z(x)\} = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + z'^2 + 2y\,z)\,dx$$

(٦,٦) المراجع

١- د. عقاب ربيع، د. حسين العمري، ١٩٩٦"مقدمة في ميكانيكا لاجرانج و هاميلتون"، الطبعة الأولى، منشورات جامعة مؤتة .الأردن.

2- H. Goldstein, ”Classical Mechanics”, 2nd ed., Addison-Wesley, 1992.

3- L.D. Landau and E.M. Lifshits, ”Mechanics”, 3rd ed., Pergammon Press Ltd., 1976.

4- R.A. Matzner and L.C. Shepley, ”Classical Mechanics”, 4th ed., Prentice-Hall Inc., 1991.

5- Fowles, G.R. and Cassiday, G.L., ”A Addison-Wesley nalytical Mechanics”, 5th ed., Saunders College Publishing, 1993.

6- E.N. Moore, ”Theoretical Mechanics”, 2nd ed., John-Wiley and Sons, 1988.

الاهتزازات الصغيرة

SMALL OSCILLATIONS

• المقدمة • طاقة الوضع والاتزان • الاهتزازات الصغيرة حول نقطة الاتزان • تعامد المتجهات المميزة • استخدام المصفوفات لدراسة الاهتزازات الصغيرة • الإحداثيات الطبيعية • اهتزازات الجزيئات • مسائل

(٧,١) المقدمة

تعتبر دراسة الاهتزازات الصغيرة، وتحديد حالة استقرار الأنظمة الديناميكية من المسائل المهمة في الفيزياء، ومثال ذلك، ذرات المادة في الحالة الصلبة، فإنها تجذب بعضها البعض بقوة معينة، وتهتز حول موضع الاتزان، وهذه القوة تمثل بقوة المرونة في الزنبركات.

في هذا الفصل سوف ندرس حركة الأنظمة حول نقاط التوازن.

(٧,٢) طاقة الوضع والاتزان

Potential and Equilibrium Energy

حتى نفهم نظريا الاهتزازات البسيطة لابد من دراسة العلاقة بين طاقة الوضع و الاتزان التي تؤدي إلى حالة الاستقرار أو حالة عدم

الاستقرار للنظام الفيزيائي، لذلك دعنا نعتبر أن النظام الفيزيائي يتكون من n درجة حرية ومحدد بالإحداثيات المعممة التالية:

$$q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n \qquad (7-1)$$

لنفرض أن هذا النظام محافظ، إذن طاقة الوضع:

$$V = V(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n)$$

والقوى المعممة Q_k تعطى بالعلاقة التالية :

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (7-2a)$$

نقول أن هذا النظام في حالة اتزان، إذا كانت القوى المعممة تساوي الصفر، أي أن:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \qquad (7-2b)$$

يبقى النظام في حالة سكون ما لم تؤثر عليه قوى خارجية، وإذا أزيح إزاحة صغيرة جدا عن موضع الاتزان وعاد إلى موضعه الأصلي، نقول : إن النظام في حالة اتزان مستقر وخلاف ذلك نقول انه متزن اتزانا غير مستقر فعلى سبيل المثال : البندول البسيط الساكن، يعتبر متزن اتزانا مستقرا ، بينما إذا وضعت بيضة بشكل طولي بحيث ترتكز على نهاياتها ، تكون في حالة اتزان غير مستقر. ومن هذه الأمثلة ، يتضح أنه إذا كانت طاقة الوضع أقل ما يمكن، يكون النظام في حالة أتزان مستقر، و بتعبير رياضي : إذا كانت المشتقة الثانية لدالة طاقة الوضع عند نقطة الاتزان أكبر من صفر، يكون الاتزان مستقرا ، أما إذا كانت المشتقة الثانية أقل من صفر يكون الاتزان غير مستقر. أي أن :

$$V = V(q) \qquad (7-3)$$

و إذا كانت :

$$F = -\frac{dV}{dq}\Big|_0 = 0 \qquad (7-4)$$

فيكون النظام متزنا عند نقطة الأصل، وإذا كانت المشتقة الثانية عند النقطة 0 أكبر من صفر :

$$\frac{d^2V}{dq^2}\Big|_0 > 0 \qquad (7-5)$$

فتكون طاقة الوضع V_0 أقل ما يمكن، و الاتزان في هذه الحالة اتزان مستقر. أما إذا كانت :

$$\frac{d^2V}{dq^2}\Big|_0 < 0 \qquad (7-6)$$

فهذا يعني أن V_0 أكبر ما يمكن، و الاتزان غير مستقر.

مثال (٧-١) :

يتحرك جسيم كتلته m في مجال قوة، طاقة وضعها ممثلة بالعلاقة التالية:

$$V(x) = (1-\alpha x)e^{-\alpha x} \qquad , x \geq 0$$

حيث α ثابت قيمته موجبة، اوجد ما يلي: أ) نقاط الاتزان، ب) طبيعة نقاط الاتزان؟

الحل :

بأخذ المشتقة الأولى لطاقة الوضع $V(x)$ ومساواتها بالصفر نجد أن:

$$\frac{dV(x)}{dx}=-\alpha \ e^{-\alpha x}+(1-\alpha \ x)(-\alpha) \ e^{-\alpha x}=0$$

ومنها فأن:

$$-\alpha \ e^{-\alpha x}-\alpha \ e^{-\alpha x}+\alpha^2 x \ e^{-\alpha x}=0$$

أي أن:

$$\left(-2\alpha+\alpha^2 x\right)e^{-\alpha x}=0$$

إذن :

$$2\alpha=\alpha^2 x \Rightarrow x=\frac{2}{\alpha}$$

يوجد نقطة أتزان عندما $x=\frac{2}{\alpha}$

و بأخذ المشتقة الثانية لطاقة الوضع $V(x)$ نجد أن :

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2}=2\,\alpha^2 e^{-\alpha x}+\alpha^2 e^{-\alpha x}-\alpha^3 x\, e^{-\alpha x}$$
$$=\left(2\alpha^2+\alpha^2-\alpha^3 x\right)e^{-\alpha x}$$

و بتعويض قيمة x نحصل على :

$$\left.\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right|_{x=\frac{2}{\alpha}}=\left\{2\alpha^2+\alpha^2 e^{-\alpha x}-\alpha^3\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right\}e^{-\alpha\frac{2}{\alpha}}$$
$$=\alpha^2 e^{-2}$$

و حيث أن قيمة $\alpha^2 e^{-2}$ أكبر من الصفر، فإن الاتزان مستقر.

(٧,٣) الاهتزازات الصغيرة حول نقطة الاتزان
Small Oscillations

سوف نهتم في هذا الفصل بدراسة حركة النظام بالقرب من نقطة الاتزان المستقر، بحيث تكون الإزاحة عن هذه النقطة صغيرة. وفي هذه الحالة نستطيع نشر دالة طاقة الوضع حول نقطة الاتزان باستخدام متسلسلة تيلر. وعلى اعتبار أنّ النظام محافظ، و يحتوي على n من درجات الحرية، بحيث أنّ مجموعة الإحداثيات المعممة هي: $(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n)$ فإنّ طاقة الوضع تُعطى بالدالّة التالية :

$$V(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n)$$

التي يمكن نشرها حول نقطة الاتزان المحددّة بالإحداثيات :

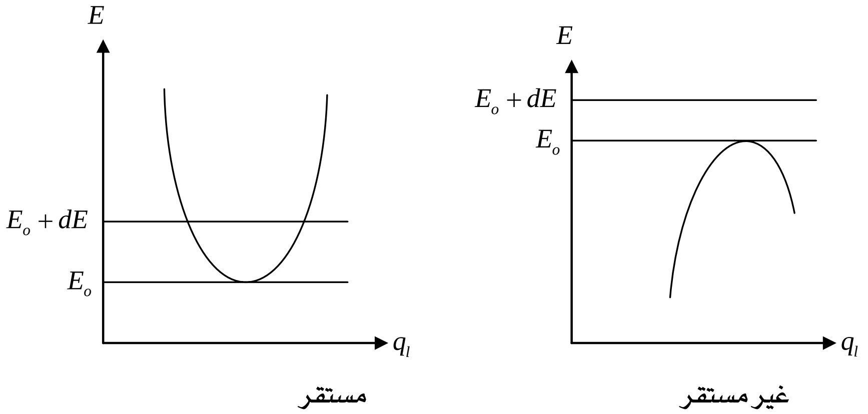
$$(q_{10}, q_{20}, q_{30}, \ldots\ldots, q_{no})$$

كما يلي :

$$V(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots, q_n) = V(q_{10}, q_{20}, q_{30}, \ldots\ldots, q_{no}) + \frac{1}{1!}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial q_l}\right)\Bigg|_{q_1=q_{10}}(q_1 - q_{10})$$
$$+\frac{1}{2!}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial q_m}\right)\Bigg|_{q_1=q_{10}q_m=q_{mo}}(q_1 - q_{10})\ (q_m - q_{m0}) + \ldots\ldots \qquad (7-7)$$

الحد الأول في الطرف الأيمن مقدار ثابت. وبما أنّ تحديد نقطة الصفر لطاقة الوضع اختياري، نستطيع اعتبار هذا الحد صفرا بدون أن يحصل أي تأثير على معادلة الحركة الشكل (١- ٧). القوى المعممة Q_l ، يجب أن تساوي صفرا ؛ لأنّ النظام في حالة اتزان، أي أنّ :

$$Q_l = -\frac{\partial V}{\partial q_l} = 0 \quad l = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (7-8)$$



الشكل (١- ٧): منحنى طاقة الوضع عند الاتزان.

و بإهمال الرتب العالية، يبقى عندنا الحد الثالث في الطرف الأيمن، الذي يحتوي على الرتبة الثانية؛ لذلك نكتب طاقة الوضع كما يلي:

$$V(q_1, q_2, ..., q_n) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial q_m}\right)\Big|_{q_l=q_{210}, q_m=q_{m0}} (q_l - q_{l0})(q_m - q_{m0}) \qquad (7-9)$$

و إذا عرّفنا الإحداثيات المعمّمة التالية:

$$\eta_l = (q_l - q_{l0})$$
$$\eta_m = (q_m - q_{m0})$$

نستطيع كتابة طاقة الوضع بدلالة هذه الإحداثيات كما يلي :

$$V = V(\eta_l) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} V_{lm}\ \eta_l\ \eta_m \qquad (7-10)$$

حيث:

$$V_{lm} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial q_m}\right)\Big|_{q_l=q_{l0}, q_m=q_{m0}} = cons.$$

الثابت V_{lm}، يمثل مصفوفة متناظرة (Symmetric Matrix)

الشكل العام لطاقة الحركة:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}M_{lm}\,\dot{q}_l\,\dot{q}_m$$

حيث M_{lm} ، دالة تعطى بدلالة الإحداثيات q_i و يمكن نشرها كما يلي :

$$M_{lm}=M_{lm}\left(q_{10},q_{20},\ldots\ldots,q_{n0}\right)+\sum\frac{\partial M_{lm}}{\partial q_k}\Big|_0\;q_k+\ldots\ldots \qquad (7-11)$$

وأقل قيمة لطاقة الحركة T يمكن الحصول عليها بإهمال جميع الحدود في الطرف الأيمن، عدا الحد الأول الذي يمثل كمية ثابتة سوف نرمز له بالرمز T_{lm} ، وأيضا يمثل مصفوفة متناظرة. وبما أنّ : $\dot{\eta}_l=\dot{q}_l$ فنستطيع كتابة طاقة الحركة كما يلي :

$$T=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}T_{lm}\;\dot{\eta}_l\;\dot{\eta}_m \qquad (7-12)$$

حيث :

$$T_{lm}=\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\eta}_l\;\dot{\eta}_m}$$

والآن بعد الحصول على تعبير لطاقة الوضع و طاقة الحركة في حالة الاهتزازات الصغيرة، نكون في صدد كتابة دالة لاجرا نج كما يلي :

$$L=T+V=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(T_{lm}\;\dot{\eta}_l\;\dot{\eta}_m-V_{lm}\;\eta_l\;\eta_m\right) \qquad (7-13)$$

لذلك تكون معادلة لاجرا نج :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial\eta_k}=0$$

التي تأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{m=1}^{n}\left(T_{lm}\ \ddot{\eta}_m + V_{lm}\ \eta_m\right) = 0 \quad l = 1,2,....,n \qquad (7-14)$$

المعادلة (١٤- ٧) تمثل n معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية، و حسب طرق حل المعادلات التفاضلية نتوقع الحل أن يكون على الصورة التالية :

$$\eta_m = A_m \cos\left(\omega\ t + \Phi_m\right) \qquad (7-15)$$

و بتعويض هذا الحل في المعادلة (١٤- ٧) نحصل على:

$$\sum_{m=1}^{n} V_{lm}\ A_m \cos\left(\omega\ t+\Phi_m\right) - T_{lm}\ \omega^2 A_m \cos\left(\omega\ t+\Phi_m\right)=0 \qquad (7-16)$$

لكل قيمة من قيم ω يجب أن تكون جميع Φ_m متساوية. أي أنّ: $\Phi_m = \Phi$ وبما أنّ قيم $\cos(\omega t + \Phi_m)$ لا تساوي صفراً لجميع قيم t، إذن:

$$\sum_{m=1}^{n}\left(V_{lm} - T_{lm}\ \omega^2\right)A_m = 0 \quad l = 1,2,...,n \qquad (7-17)$$

هذه المعادلة، يمكن أن تُكتب بشكلٍ صريح كما يلي:

$$\begin{gathered}\left(V_{11}-T_{11}\omega^2\right)A_1+\left(V_{12}-T_{12}\omega^2\right)A_2+.....+\left(V_{1n}-T_{1n}\omega^2\right)A_n=0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (7-18)\\ \left(V_{n1}-T_{n1}\omega^2\right)A_1+\left(V_{n2}-T_{n2}\omega^2\right)A_2+.....+\left(V_{nn}-T_{nn}\omega^2\right)=0\end{gathered}$$

وحتى نحصل على حلول غير صفرية ل (A_m)، يجب أن تكون محدّدة معاملات (A_m) مساوية للصفر. أي أنّ :

$$\begin{vmatrix}\left(V_{11}-T_{11}\omega^2\right)\left(V_{12}-T_{12}\omega^2\right).....\left(V_{1n}-T_{1n}\omega^2\right)\\ \\ \left(V_{n1}-T_{n1}\omega^2\right)\left(V_{n2}-T_{n2}\omega^2\right).....\left(V_{nn}-T_{nn}\omega^2\right)\end{vmatrix}=0 \qquad (7-19)$$

و بحساب هذه المحدّدة نحصل على معادلة كثيرة الحدود من الدرجة n إلى ω^2 كل جذر من جذور هذه المعادلة يمثل تردد مختلف. لهذا يمكن كتابة الحل العام كما يلي :

$$\eta_l = \sum_{k=1}^{n} f_k \quad A_{lk} \quad \cos \quad (\omega_k t + \Phi_k) \qquad (7-20)$$

حيث أنّ ω_k هي جذور لمعادلة كثيرة الحدود ، و Φ_k, f_k, A_{lk} ثوابت يمكن تحديدها باستخدام الشروط الابتدائية. إذا كانت قيمة ω^2 سالبة أو صفراً ، فلا يكون هناك حركة اهتزازية. أمّا إذا كانت قيمة ω^2 موجبة ، فسوف يكون اهتزازات حول نقطة الاتزان، أي انه إذا كانت :

$\omega_k{}^2 > 0$ فإن $\eta_k = A_k \exp(i\omega t) + B_k \exp(-i\omega t)$

و إذا كانت : $\omega^2{}_k = 0$ فان $\eta_k = C_k t + D_k$

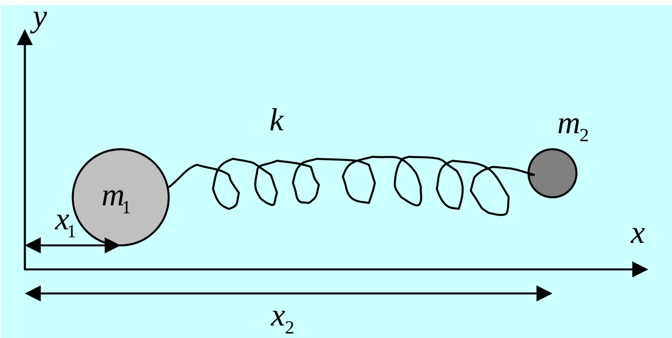
وإذا كانت: $\omega^2{}_k < 0$ فان $\eta_k = E_k \exp(\omega_k t) + F_k \exp(-\omega t)$

و بتعويض قيم ω_k في المعادلة (١٨- ٧)، نستطيع تحديد قيم السعة A_{kl} بدلالة A_{kl}

حيث أنه يوجد n قيمة لـ (ω_k^2) و يوجد n ثابت $(A_{kl})(k = 1,2,\ldots,n)$

مثال (٢-٧)

جزيء يتكون من ذرتين كما في الشكل (٢- ٧)، جد الترددات الطبيعية لهذا النظام، إذا أُعتبر أنّه يكافئ كتلتين (m_1) و (m_2) مربوطتين بواسطة زنبرك عديم الكتلة ثابت مرونته k ؟



الشكل (٢- ٧) جزيء يتكون من ذرتين.

الحل :

معتمداً على الشكل (٢- ٧)، فإنّ طاقة الحركة وطاقة الوضع لهذا النظام تعطى على الترتيب بالمعادلتين التاليتين :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \, \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \, \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} k \left(x_2 - x_1 \right)^2$$

و منها نحصل على دالة لاجرانج :

$$L = \frac{1}{2} m_1 \, \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \, \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k \left(x_2 - x_1 \right)^2$$

باستخدام معادلات لاجرانج نحصل على معادلات الحركة :

$$m_1 \, \ddot{x}_1 + k \, x_1 - k \, x_2 = 0$$

$$m_2 \, \ddot{x}_2 + k \, x_2 - k \, x_1 = 0$$

فيكون شكل الحلول المتوقعة :

$$x_1 = A \cos \omega \, t$$

$$x_2 = B \cos \omega \, t$$

نعوض هذه الحلول في معادلات الحركة لنحصل على المعادلات التالية :

$$- m_1 \, \omega^2 A \cos \omega \, t + k \, A \cos \omega \, t - k \, B \cos \omega \, t = 0$$

$$- m_2 \, \omega^2 B \cos \omega \, t + k \, B \cos \omega \, t - k \, A \cos \omega \, t = 0$$

وبحذف $\cos \omega \, t$ من المعادلتين السابقتين نحصل على :

$$\left(-m_1\ \omega^2+k\right)A-k\ B=0$$

$$-k\ A+\left(-m_2\ \omega^2+k\right)B=0$$

الآن محددة معاملات A و B يجب أن تساوي صفراً.

$$\begin{vmatrix} \left(-m_1\ \omega^2+k\right) & k \\ -k & \left(-m_2\ \omega^2+k\right) \end{vmatrix}=0$$

إذن :

$$\left(-m_1\ \omega^2+k\right)\left(-m_2\ \omega^2+k\right)-k^2=0$$

$$m_1\ m_2\ \omega^4-m_1\ k\ \omega^2-m_2\ k\ \omega^2-k^2+k^2=0$$

$$\omega^2\ \left\{m_1\ m_2\ \omega^2-k\left(m_1+m_2\right)\right\}=0$$

فنجد :

$$\omega_1^2=0$$

$$\omega_2^2=\frac{k\ \left(m_1+m_2\right)}{m_1\ m_2}$$

(٧,٤) تعامد المتجهات المميزة

إن المتجهات المميزة A_m في المعادلات (١٨- ٧) تشكل مجموعة تعامد قياسي، وباستخدام المعادلة (١٧- ٧) نحصل على :

$$\sum_{m=1}^{n} V_{lm}\quad A_{mk}=\omega_k^2\quad \sum_m T_{lm}\quad A_{mk} \qquad (7-21)$$

نكتب هذه المعادلة بدلالة التردّد ω_j و ذلك باستبدال k ب j و m ب l.

$$\sum_{l=1}^{n} V_{lm} \quad A_{lj} = \omega_j^2 \quad \sum_{l} T_{lm} \quad A_{lj} \qquad (7-22)$$

V_{lm} و T_{lm} مصفوفتان متناظرتان لذلك :

$$T_{lm} = T_{ml}$$
$$V_{lm} = V_{ml}$$

بضرب المعادلة (٢١- ٧) في A_{lj} و الجمع فوق l ، وضرب المعادلة (٢٢-٧) في A_{mk} ، و الجمع فوق m . نحصل على المعادلتين التاليتين :

$$\sum_{m,\, l} V_{lm} A_{mk} A_{lj} \quad = \quad \omega_k^2 \sum_{l\ ,m} T_{lm} A_{mk} A_{lj} \qquad (7-23)$$

$$\sum_{m,\, l} V_{lm} A_{lj} A_{mk} \quad = \quad \omega_j^2 \sum_{l\ ,m} T_{lm} A_{lj} A_{mk} \qquad (7-24)$$

بطرح المعادلة (٢٤- ٧) من المعادلة (٢٣- ٧)، نحصل على :

$$0 = \left(\omega_k^2 - \omega_j^2\right) \sum_{l,m} T_{lm} \ A_{mk} \ A_{lj}$$

إذا كانت $k \neq j$ فإنّ $\left(\omega_k^2 - \omega_j^2\right) \neq 0$ ، وهذا يعني : أنّ المجموع يساوي الصفر. أي أنّ :

$$\sum_{l,\ m} T_{lm} \quad A_{lj} \quad A_{mk} \quad = \ 0 \qquad (7-25)$$

في حالة $k \neq j$

وفي هذه الحالة نقول أنّ المتجهات المميزة A_m في المعادلات (١٨- ٧)، تشكل مجموعة تعامد. أمّا إذا كانت $k = j$ ، يكون المجموع $\sum_{l,m} T_{lm} \ A_{mk} \ A_{lj}$ غير محدّد ، ويجب أن يكون أكبر من الصفر ، حتى

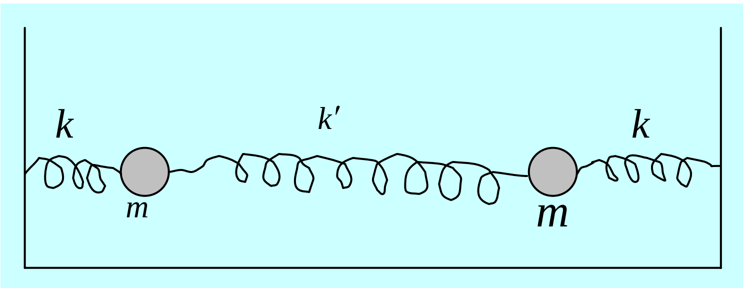
يكون للنظام طاقة حركة، لذلك نختار المتجهات المميزة A_m بحيث تشكل مجموعات قياسية أي أنّ:

$$\sum_{m,\,l} T_{lm} \quad A_{mk} \quad A_{mk} \ = 1 \qquad\qquad (7-26)$$

و إذا تحقق الشرطان (٢٥- ٧) و (٢٦- ٧) نقول: أنّ المتجهات المميزة A_m تشكل مجموعة تعامد قياسي. و سوف نستخدم الشرط (٢٦- ٧) في تحديد المتجهات المميزة.

مثال (٣-٧)

كتلتان متساويتان مربوطتان بواسطة زنبركين ثابت مرونة كل منهما k. إذا ربطت الكتلتان مع بعضهما بواسطة زنبرك ثالث ثابت مرونته k'، وكانت حركة الكتلتين محصورة على نفس الخط الذي يربطهما كما في الشكل (٣- ٧)، جد المتجهات المميزة و الترددات المميزة و الحلول العامة؟



الشكل (٣- ٧) كتلتان متساويتان تهتزان بتأثير الزنبركات.

الحل :

طاقة الحركة، وطاقة الوضع، و لاجرانج للنظام في الشكل (٣- ٧) على الترتيب :

$$T=\frac{1}{2}m\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\,\dot{x}_2^2$$

$$V=\frac{1}{2}k\,x_1^2+\frac{1}{2}k\,x_2^2+\frac{1}{2}k'(x_1-x_2)^2$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{1}{2}k(x_1^2+x_2^2)-\frac{1}{2}k'(x_1-x_2)^2$$

ولكن :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=m\,\dot{x}_1 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=m\,\dot{x}_2$$

إذاً معادلة الحركة :

$$m\,\ddot{x}_1+(k+k')x_1-k'x_2=0$$

$$m\,\ddot{x}_2+(k+k')x_2-k'x_1=0$$

حسب المعادلة (١٥- ٧) نفترض الحلول التالية :

$$x_1=A_1\cos\omega t \ , \ \ x_2=A_2\cos\omega t$$

نعوض هذه الحلول في معادلات الحركة فنحصل على :

$$-m\omega^2 A_1\cos\omega t+(k+k')A_1\cos\omega t-k'A_2\cos\omega t=0$$

$$-m\omega^2 A_2\cos\omega t+(k+k')A_2\cos\omega t-k'A_1\cos\omega t=0$$

بحذف $\cos\omega t$ من المعادلتين السابقتين :

$$\left\{-m\omega^2+(k+k')\right\}A_1-k'A_2=0 \qquad (7-27a)$$

$$\{-m\omega^2+(k+k'\ )\}A_2-k'A_1=\ 0 \qquad (7-27b)$$

وحتى نحصل على حلول ليست بديهية لكل من A_1 و A_2 ، يجب أن تكون محددة معاملات A_1 و A_2 مساوية للصفر، أي :

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2+k+k' & -k' \\ -k' & -m\omega^2+k+k' \end{vmatrix}=0$$

و بحساب قيمة المحددة نجد :

$$\left(-m\omega^2+k+k'\right)^2-k'^2=0$$

و بنقل k'^2 إلى الطرف الأيمن، وأخذ الجذر ألتربيعي للطرفين نحصل على:

$$\left(-m\omega^2+k+k'\right)=\pm k'$$

و هذا يعني أنه يوجد قيمتان للتردد ω:

$$-m\omega_1^2\ =+k'-k-k'$$

القيمة الأولى :

$$\omega_1^2\ =\frac{k}{2}$$

و نحصل على القيمة الثانية بأخذ إشارة السالب كما يلي :

$$-m\omega_2^2\ =-k'-k-k'=-2k'-k$$

فتكون القيمة الثانية :

$$\omega_2^2\ =\frac{2k'+k}{m}$$

ω_1 و ω_2 هي الترددات المميزة.

لإيجاد المتجهات المميزة نعوض قيم ω_1^2 و ω_2^2 في المعادلات (٢٧- ٧) التي يمكن إعادة صياغتها بالنسبة للتردد الأول كما يلي :

$$\left(-m\omega_1^2 + k + k'\right)A_{11} - k'A_{21} = 0$$

$$\left(-m\omega_1^2 + k + k'\right)A_{21} - k'A_{11} = 0$$

و بتعويض قيمة ω_1^2 نحصل على :

$$A_{11} = A_{21} = A$$

أيضا بالنسبة للتردد الثاني :

$$\left(-m\omega_2^2 + k + k'\right)A_{12} - k'A_{22} = 0$$

$$\left(-m\omega_2^2 + k + k'\right)A_{22} - k'A_{12} = 0$$

و بتعويض قيمة ω_2^2 نحصل على :

$$A_{12} = -A_{22} = B$$

إذن المتجهات المميزة هي :

$$\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} B \\ -B \end{pmatrix}$$

ويمكن تحديد قيم A و B باستخدام شرط التقييس (٢٦- ٧) حيث $k=1$ أو $k=2$. حسب الترددات في حالة التردد الأول ω_1 ، فإنّ $k=1$.

إذن :

$$T_{11}A_{11}A_{11} + T_{12}A_{21}A_{11} + T_{21}A_{11}A_{21} + T_{22}A_{21}A_{21} = 1$$

علما بأن المصفوفة T_{lm} تحدد كما يلي :

$$T_{lm} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_l \, \partial \dot{x}_m} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

إذن :

$$m A^2 + m A^2 = 1 \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

أيضا $k = 2$ عندما يكون التردد ω_2 وشرط التقييس (Normalized Condition) يكتب كما يلي :

$$T_{11} A_{12} A_{12} + T_{12} A_{12} A_{22} + T_{21} A_{22} A_{12} + T_{22} A_{22} A_{22} = 1$$

$$m B^2 + m B^2 = 1 \Rightarrow \quad B = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

لذلك تكتب المتجهات المميزة (Eigen Vectors) كما يلي :

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ و } \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ب) باستخدام العلاقة (٢٠- ٧) نجد الحل العام كما يلي :

$$x_1 = f_1 A_{11} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + f_2 A_{12} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

$$x_1 = \frac{f_1}{\sqrt{2m}} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + \frac{f_2}{\sqrt{2m}} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

$$x_2 = f_1 A_{21} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + f_2 A_{22} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

$$x_2 = \frac{f_1}{\sqrt{2m}} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) - \frac{f_2}{\sqrt{2m}} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

(٧,٥) استخدام المصفوفات لدراسة الاهتزازات الصغيرة

مسائل الاهتزازات الصغيرة التي ناقشناها، من الممكن أن تعالج باستخدام المصفوفات، إذا اعتبرنا نظاما يتكون من n درجة حرية و يحتوي على الاهتزازات الصغيرة حول نقطة الاتزان، فانّ معادلات لاجرا نج لهذا النظام هي :

$$\sum_{m=l}^{n}\left(V_{lm}A_m-\omega^2T_{lm}A_m\right)=0 \qquad l=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ....,\ n \qquad (7-28)$$

حيث :

$$V_{lm} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_m}\right)_{q_1=q_{10}\ ,\ q_m=q_{m\,0}} = V_{ml} \qquad (7-29)$$

$$T_{lm} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_1 \partial q_m}\right)_{q_1=q_{10}\ ,\ q_m=q_{m\,0}} = T_{ml} \qquad (7-30)$$

المعادلة (٢٨- ٧) تكافئ المعادلات التالية :

$$\begin{aligned}
&\left(V_{11}-\omega^2T_{11}\right)A_1+\left(V_{12}-\omega^2T_{12}\right)A_2+......+\left(V_{1n}-\omega^2T_{1n}\right)A_n=0\\
&.\\
&. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (7-31)\\
&.\\
&.\\
&\left(V_{n1}-\omega^2T_{n1}\right)A_1+\left(V_{n2}-\omega^2T_{n2}\right)A_2+......+\left(V_{nn}-\omega^2T_{nn}\right)A_n=0
\end{aligned}$$

الكميات V_{lm} عبارة عن عناصر المصفوفة المتناظرة V التي تكتب كما يلي :

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & . & . & . & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & . & . & . & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & & & & . \\ V_{n1} & V_{n2} & . & . & . & V_{nn} \end{bmatrix} \qquad (7-32)$$

و الكميات T_{lm} عبارة عن عناصر المصفوفة المتناظرة T التي تكتب كما يلي :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & . & . & . & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & . & . & . & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & & & & . \\ T_{n1} & T_{n2} & . & . & . & T_{nn} \end{bmatrix} \qquad (7-33)$$

إذن معادلة لاجرانج تكتب باستخدام المصفوفات :

$$\left(V - \omega^2 T\right) a = 0 \qquad (7-34)$$

حيث أن a مصفوفة تتكون من عمود واحد :

$$a = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} \qquad (7-35)$$

لكل تردد ω_k يوجد متجه مميز مصاحب a_k ، لذلك يوجد عندنا n متجه مميز مصاحب لـ (n) قيمة مميزة (Eigen Values) ω_k . هذه المتجهات

المميزة تكون مصفوفة مربعة نسميها A ، حيث أنّ أعمدتها هي المتجهات المميزة a_k أي أنّ :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & . & . & . & A_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & & & & . \\ A_{n1} & A_{n2} & . & . & . & A_{nn} \end{bmatrix} \qquad (7-36)$$

لذلك نعيد كتابة المعادلة (٣٥- ٧) كما يلي :

$$a_k = \begin{bmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \\ . \\ . \\ A_{nk} \end{bmatrix} \qquad (7-37)$$

(٧,٦) الإحداثيات الطبيعية Normal Coordinates

من الجدير بالذكر هنا، أن نشير إلى الإحداثيات الطبيعية (Normal Coordinates). وهي الإحداثيات التي تهتز بتردد واحد حيث لاحظنا مما سبق أنّ الحلّ العام للإحداثي q_l ، يحتوي على جميع الترددات، أي أنّ :

$$ql = \sum_{k=l}^{n} f_k \, A_{lk} \cos(\omega_k t + \Phi_k)$$

حيث f_k ثابت معياري يحدد من الشروط الابتدائية المصاحبة لثابت الطور Φ_k.

الآن نعرف الكمية Q_k التي تحتوي على تردد واحد ω_k :

$$Q_k = f_k \cos(\omega_k t + \Phi_k) \qquad (7-38)$$

حيث :

$$q_l = \sum_k A_{lk} Q_k \qquad (7-39)$$

Q_k ، هي الكميات التي تهتز بتردد واحد ، و من الممكن أن نعتبرها إحداثيات جديدة نسميها الإحداثيات الطبيعية ، حيث أنها تحقق المعادلة التالية :

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = 0 \qquad (7-40)$$

إذن: الإحداثيات الطبيعية ، هي الإحداثيات التي تهتز بتردد واحد ، و تحقق المعادلة (٧ -٤٠). و معادلات الحركة تكتب باستخدام الإحداثيات الطبيعية ، و كل معادلة تكون مستقلة عن المعادلات الأخرى، و نستطيع إثبات المعادلة (٧ -٤٠) بسهولة.

من المعادلة (٧ -٣٩) نلاحظ أنّ :

$$\dot{q}_l = \sum_k A_{lk} \dot{Q}_k$$

لذلك تكتب طاقة الحركة كما يلي :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l,m} T_{lm} \dot{q}l \dot{q}_m \qquad (7-41)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l,m} T_{lm} (\sum_k A_{lk} \dot{Q}_k)(\sum_s A_{ms} \dot{Q}_s)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,s} \left(\sum_{l,m} T_{l,m} A_{lk} A_{ms} \right) \dot{Q}_k \dot{Q}_s$$

وباستخدام شرط التعامد القياسي (Orthonormality Condition) نعرف أنّ:

$$\sum_{l,m} T_{lm} A_{lk} A_{ms} = \delta_{ks}$$

حيث δ_{ks} كرونيكر دلتا.

إذن :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,s} \delta_{ks} \dot{Q}_k \dot{Q}_s = \frac{1}{2} \sum_k \dot{Q}_k^2 \qquad (7-42)$$

أيضا طاقة الوضع تكتب كما يلي :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{l,m} V_{lm} q_l q_m \qquad (7-43)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k,s} \left(\sum_{l,m} V_{lm} A_{lk} A_{ms} Q_k Q_s \right) \qquad (7-44)$$

من المعادلة (٢٣- ٧) نعرف أنّ :

$$\sum_{l,m} V_{lm} A_{lk} A_{ms} = \omega_k^2 \sum_{l,m} T_{lm} A_{lk} A_{ms} = \omega_k^2 \delta_{ks}$$

و بالتعويض في المعادلة (٤٤- ٧) نحصل على طاقة الوضع بالشكل التالي:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k,s} \omega_k^2 \delta_{ks} Q_k Q_s = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^2 Q_k^2 \qquad (7-45)$$

ألان نستطيع كتابة دالة لاجرانج، باستخدام دالة طاقة الحركة (٤٢- ٧)، و دالة طاقة الوضع (٤٥- ٧) كما يلي :

$$L = \frac{1}{2} \sum_k \left(\dot{Q}_k^2 - \omega_k^2 Q_k^2 \right) \qquad (7-46)$$

و معادلات لاجرانج بالنسبة للإحداثيات الطبيعية Q_k هي :

$$\frac{\partial L}{\partial Q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = 0$$

و منها :

$$\ddot{Q}_k \quad + \quad \omega_k^2 \quad Q_k \quad = \quad 0 \qquad\qquad (7-47)$$

و هــذه هــي المعادلــة (٤٠- ٧). إذا اســتطعنا التعــبير عــن توزيــع النظــام باســتخدام الإحــداثيات الطبيعيــة فــان المــصفوفتين V_{lm} و T_{lm} تــصبحان مصفوفتين قطـريتين (Diagonal Matrices)، علما بـان المصفوفة القطرية، هي مصفوفة مربعة، عناصر قطرها لا تساوي صفرا، بينما بقية عناصرها أصفار، مثل :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & & & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

يتـضح ممـا سـبق أنـه مـن الـسهل الانتقـال مـن الإحـداثيات العاديـة q_l إلى الإحـداثيات الطبيعيـة Q_l و ذلـك باسـتخدام المـصفوفة A المعطـاة بالعلاقـة (٣٦- ٧).

$$q \quad = \quad AQ \qquad\qquad (7-48)$$

و هذه المعادلة تكتب بالتفصيل على الصيغة التالية :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ . \\ . \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & . & . & A_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & & & & . \\ A_{n1} & A_{n2} & . & . & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ . \\ . \\ Q_n \end{bmatrix} \qquad\qquad (7-49)$$

و بعبارة أخرى :

$$Q = A^{-1}q \qquad (7-50)$$

حيث ترمز A^{-1} لمعكوس المصفوفة A أي أنّ :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \qquad (7-51)$$

هنا I هي مصفوفة الوحدة (Identity Matrix)

$$AI = IA = A \qquad (7-52)$$

مصفوفة الوحدة، هي حالة خاصة من المصفوفة القطرية و تحصل عندما تكون العناصر القطرية مساوية واحد:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = ...= a_{nn} = 1$$

مثال (٤-٧)

جد الإحداثيات الطبيعية للنظام الموصوف في المثال (٣- ٧) ؟

الحل :

المصفوفة A تعطى كالآتي :

$$A = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

هذه المصفوفة، هي مصفوفة متعامدة (Orthogonal Matrix) أي أنّ :

$$A^{-1} = A^{T}$$

حيث A^T ترمز للمصفوفة المبدلة للمصفوفة A (Transpose Matrix) والمصفوفة المبدلة، هي المصفوفة الناتجة من تبديل صفوف المصفوفة بأعمدتها.أي الناتجة من جعل صفوف المصفوفة أعمدة لها. الآن نحسب A^T على النحو الآتي :

$$A^T = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

و باستخدام العبارة (٥٠- ٧) نجد أنّ :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\ x_1 + \sqrt{\frac{m}{2}}\ x_2$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}\ x_1 - \sqrt{\frac{m}{2}}\ x_2$$

و بتعويض قيم x_2 و x_1 نحصل على :

$$Q_1 = \frac{f_1}{2}\cos(\omega_1 t + \Phi_1) + \frac{f_2}{2}\cos(\omega_2 t + \Phi_2) + \frac{f_1}{2}\cos(\omega_1 t + \Phi_1) - \frac{f_2}{2}\cos(\omega_2 t + \Phi_2) = f_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_1)$$

$$Q_2 = \frac{f_1}{2}\cos(\omega_1 t + \Phi_1) + \frac{f_2}{2}\cos(\omega_2 t + \Phi_2) - \frac{f_1}{2}\cos(\omega_1 t + \Phi_1) + \frac{f_2}{2}\cos(\omega_2 t + \Phi_2) = f_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

نلاحظ أنّ الإحداثيات الطبيعية تحتوي على تردد واحد.

مثال (٥-٧)

بندولان لهما نفس الطول و نفس الكتلة m ، مربوطان بواسطة زنبرك ثابت مرونته k كما في الشكل (٤- ٧).

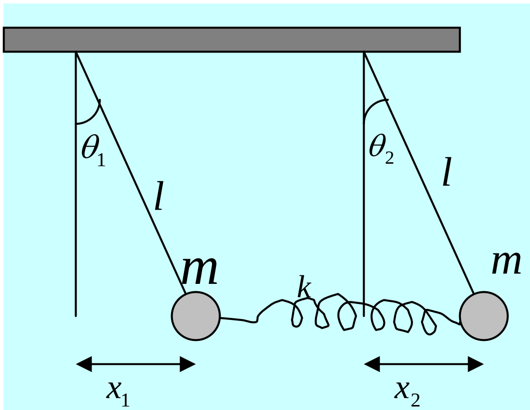
١- حددّ عناصر المصفوفة T و المصفوفة V؟

٢- اوجد الترددات الطبيعية؟

٣- اوجد المتجهات المميزة؟

٤- حددّ الإحداثيات الطبيعية؟

٥- اوجد الحلول العامة ؟



الشكل (٤- ٧) بندولان مربوطان بزنبرك.

الحل :

١- طاقة الحركة لهذا النظام :

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right)$$

إذن :

$$T=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1^2} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1\,\partial \dot{x}_2}\\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2\,\partial \dot{x}_1} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}$$

و طاقة الوضع :

$$V=mgl\,(1-\cos\theta_1)+mgl(1-\cos\theta_2)+\frac{1}{2}k\,(x_1-x_2)^2$$

نحن نعرف أن الدوال $\cos\theta_1$ و $\cos\theta_2$ يمكن نشرهما كما يلي :

$$\cos\theta_1=1-\frac{\theta_1^2}{2}+.........$$

$$\cos\theta_2=1-\frac{\theta_2^2}{2}+\ ....$$

وبما أن θ_1 و θ_1 صغيرتان، نهمل الحدود العليا في المتسلسلتين فنكتب طاقة الوضع كما يلي :

$$V=mgl\frac{\theta_1^2}{2}+mgl\frac{\theta_2^2}{2}+\frac{1}{2}k\left(x_1-x_2\right)^2$$

لكن :

$$\theta_2=\frac{x_2}{l}\quad \text{و}\quad \theta_1=\frac{x_1}{l}$$

إذن :

$$V=\frac{1}{2}\frac{mg}{l}\,(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{2}k\,(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)$$

و بإعادة ترتيب هذه المعادلة نكتب طاقة الوضع على الصورة :

$$V=\frac{1}{2}(\frac{mg}{l}+k)x_1^2+\frac{1}{2}(\frac{mg}{l}+k)\,x_2^2-k\,x_1\,x_2$$

إذن المصفوفة V تحسب كما يلي :

$$V=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\,\partial x_2}\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{mg}{l}+k & -k\\ -k & \dfrac{mg}{l}+k\end{bmatrix}$$

٢- نحسب الترددات الطبيعية باستخدام العلاقة (١٩- ٧) :

$$\left|V-\omega^2 T\right|=0$$

$$\det\begin{bmatrix}\dfrac{mg}{l}+k-m\omega^2 & -k\\ -k & \dfrac{mg}{l}+k-m\omega^2\end{bmatrix}=0$$

و بحساب قيمة المحددة نجد :

$$\left(\frac{mg}{l}+k-m\omega^2\right)^2-k^2=0$$

بنقل K^2 إلى الطرف الأيمن و أخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة، نحصل على:

$$\left(\frac{mg}{l}+k-m\omega^2\right)=\pm\,k$$

بنقل $\left(\dfrac{mg}{l}+k\right)$ إلى الطرف الأيمن و ضرب طرفي المعادلة بإشارة سالب، ينتج :

$$m\omega^2 = \frac{mg}{l} + k \pm k$$

إذن التردد الأول يحسب بأخذ إشارة السالب :

$$m\omega_1^2 = \frac{mg}{l} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{g}{l}$$

و التردد الثاني يحسب بأخذ إشارة الموجب :

$$m\omega_2^2 = \frac{mg}{l} + k + k \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$$

٣- باستخدام العلاقة (٣٤- ٧) نجد :

$$\begin{bmatrix} \frac{mg}{l} + k - m\omega_1^2 & -k \\ -k & \frac{mg}{l} + k - m\omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = 0$$

نعوض قيمة ω_1 فنحصل على :

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = 0$$

$$k A_{11} - k A_{21} = 0 \Rightarrow A_{11} = A_{21} = B$$

أذن المتجه المميز المصاحب ل (ω_1) هو :

$$\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}$$

و نستطيع تحديد قيمة B باستخدام شرط التقييس (٢٦-٧) فنحصل على:

$$mB^2 + mB^2 = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

أيضا :

$$\begin{bmatrix} \frac{mg}{l}+k-m\omega_2^2 & -k \\ -k & \frac{mg}{l}+k-m\omega_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{221} \end{bmatrix}=0$$

و بتعويض قيمة ω_2 :

$$\begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}=0$$

$$-k\,A_{12}\; - \;k\,A_{22}\; = 0$$

$$A_{12}\; = -\;A_{12}\; = C$$

فيكون المتجه المميز المصاحب هو :

$$\begin{bmatrix} C \\ -C \end{bmatrix}$$

و باستخدام شرط التقييس :

$$mC^2 + mC^2 = 1 \quad \Rightarrow \; C = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

٤- الإحداثيات الطبيعية هي :

$$Q_1 = f_1\cos\,(\omega_1 t + \Phi_1) \quad \text{و} \quad Q_2 = f_2\cos\,(\omega_2 t + \Phi_2\,)$$

٥- المصفوفة المربعة A هي :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ B & -C \end{bmatrix}$$

أي أنّ:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}}\\ \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}}\end{bmatrix}$$

و نحن نعرف أنّ :

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}}\\ \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{bmatrix}$$

إذن :

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2m}}Q_1+\frac{1}{\sqrt{2m}}Q_2$$

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{2m}}Q_1-\frac{1}{\sqrt{2m}}Q_2$$

و بتعويض قيم Q_1 و Q_2 في المعادلتين السابقتين نجد أنّ :

$$x_1=\frac{f_1}{\sqrt{2m}}\cos\left(\omega_1 t+\Phi_1\right)+\frac{f_2}{\sqrt{2m}}\cos(\omega_2 t+\Phi_2)$$

$$x_2=\frac{f_1}{\sqrt{2m}}\cos\left(\omega_1 t+\Phi_1\right)-\frac{f_2}{\sqrt{2m}}\cos(\omega_2 t+\Phi_2)$$

(٧,٧) اهتزاز الجزيئات

من التطبيقات الفيزيائية على الاهتزازات الصغيرة : اهتزازات الجزيئات التي تتكون من ذرتين أو ثلاث ذرات. الجزيئات ثنائية الذرة يمكن أن تعتبر مكافئة لذرتين لهما كتل مقدارها على الترتيب : m_1 و

m_2 ، مربوطتين بواسطة زنبرك عديم الكتلة ثابت مرونته k. تهتز الذرتان على الخط الواصل بينهما في أبسط الحالات. أمّا الجزيء ثلاثي الذرة يتكون من ذرتين متماثلتين، كتلة واحدة منهما m، موضوعتين على كل جانب من جوانب ذرة كتلتها M، و تكون الذرات الثلاث على خط مستقيم، و من الممكن أن نعتبر الاهتزازات التي تحدث على هذا الخط فقط في أبسط الحالات.

مثال (٦-٧)

جزيء يتكون من ثلاث ذرات متماثلة تهتز على خط مستقيم، كم في الشكل (٥- ٧).

١- أوجد طاقة الوضع و طاقة الحركة لهذا النظام؟

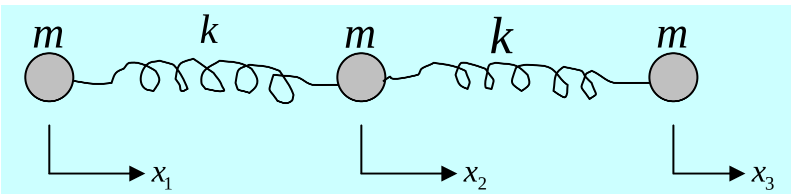
٢- أحسب المصفوفتين T, و V؟

٣- أوجد الترددات الطبيعية؟

٤- أوجد المتجهات المميزة؟

٥- ما الإحداثيات الطبيعية؟

٦- أوجد الحلول العامة؟



الشكل (٥- ٧) جزيء يتكون من ثلاثة ذرات متماثلة.

الحل :

الإحداثيات المعممة هي : x_1 و x_2 و x_3

١- طاقة الوضع:

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2$$

طاقة الحركة:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

٢- المصفوفة T تحسب كالآتي:

$$T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1^2} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_3} \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_1} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_2} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

و المصفوفة V هي:

$$V = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

٣- الترددات الطبيعية نحصل عليها من العلاقة (١٩- ٧)

$$\left| V - \omega^2 T \right| = \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

وبحساب قيمة هذه المحددة نحصل على :

$$\left(k-m\omega^2\right)\left\{\left(2k-m\omega^2\right)\left(k-m\omega^2\right)-k^2\right\}-k^2\left(k-m\omega^2\right)=0$$

و بعبارة أخرى :

$$\left(k-m\omega^2\right)\left(2k^2-2k\,m\omega^2-k\,m\omega^2+m^2\,\omega^4-k^2-k^2\right)=0$$

و منها فإن :

$$\omega^2\left(k-m\omega^2\right)\left(m^2\,\omega^2-3k\,m\right)=0$$

إذن :

$$\omega_1=0\ ,\ k-m\,\omega_2^2=0\ \Rightarrow\ \omega_2^2=\frac{k}{m}$$

$$m^2\,\omega_3^2-3k\,m=0\ \Rightarrow\ \omega_3^2=\frac{3k}{m}$$

٤- المتجهات المميزة تحسب باستخدام العلاقة (٣٤- ٧) كما يلي:

$$\begin{bmatrix} k-m\omega_k^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-m\omega_k^2 & -k \\ 0 & -k & k-m\omega_k^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \\ A_{3k} \end{bmatrix}=0$$

بالنسبة لـ (ω_1) نعوض قيمتها فنحصل على :

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix}=0$$

أي أن :

$$k\,A_{11}-k\,A_{21}=0$$

$$A_{11}=A_{21}=B$$

$$-k\,A_{21}+k\,A_{31}=0$$

$$A_{21}=A_{31}=B$$

إذن المتجه المميز الأول هو :

$$\begin{bmatrix} B \\ B \\ B \end{bmatrix}$$

و باستخدام شرط التقييس نحصل على :

$$mB^2 + mB^2 + mB^2 = 1 \qquad \Rightarrow \; B = \frac{1}{\sqrt{3m}}$$

و إذا عوضنا قيمة ω_2 نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k & -k \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{bmatrix} = 0$$

و هذا يؤدي إلى :

$$-k\,A_{22} = 0 \qquad \Rightarrow \quad A_{22} = 0$$

$$-k\,A_{12} - k\,A_{32} = 0 \qquad \Rightarrow \quad A_{12} = -A_{32} = C$$

إذن المتجه المميز الثاني :

$$\begin{bmatrix} C \\ 0 \\ -C \end{bmatrix}$$

و باستخدام شرط التقييس نحصل على :

$$m\,C^2 + m\,C^2 = 1 \qquad \Rightarrow \; C = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

و بتعويض قيمة ω_3 نحصل على

$$\begin{bmatrix} -2k & -k & 0 \\ -k & -k & -k \\ 0 & -k & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{bmatrix} = 0$$

و هذه المعادلة تؤدي إلى المعادلات التالية :

$$-2k\,A_{13} - k\,A_{23} = 0$$

$$A_{13} = -\frac{1}{2}A_{23} = D$$

$$-k\,A_{23} - 2k\,A_{33} = 0$$

$$-\frac{1}{2}A_{23} = A_{33} = D$$

إذن المتجه المميز الثالث هو :

$$\begin{bmatrix} D \\ -2D \\ D \end{bmatrix}$$

أيضاً باستخدام شرط التقييس نحصل على :

$$mD^2 + 4mD^2 + mD^2 = 1 \qquad \Rightarrow \; D = \frac{1}{\sqrt{6m}}$$

لذلك المصفوفة المربعة A هي :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix}$$

٥- الإحداثيات الطبيعية هي :

$$Q_1 = f_1 \cos\Phi_1$$
$$Q_2 = f_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$
$$Q_3 = f_3 \cos(\omega_3 t + \Phi_3)$$

٦) نجد الحلول العامة باستخدام العلاقة (٤٠- ٧)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

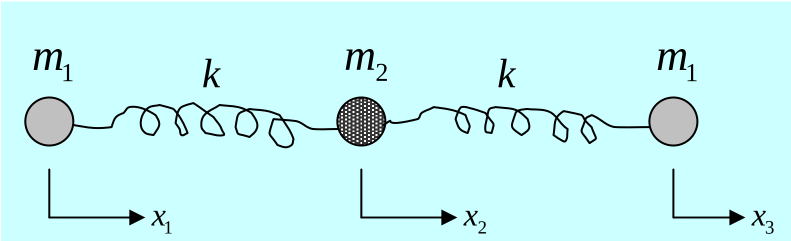
و بإيجاد حاصل ضرب المصفوفتين على الطرف الأيمن نجد :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}} f_1 \cos\Phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2m}} f_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_2) + \frac{1}{\sqrt{6m}} f_3 \cos(\omega_3 t + \Phi_3)$$
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3m}} f_1 \cos\Phi_1 - \frac{2}{\sqrt{6m}} f_3 \cos(\omega_3 t + \Phi_3)$$
$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3m}} f_1 \cos\Phi_1 - \frac{1}{\sqrt{2m}} f_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_2) + \frac{1}{\sqrt{6m}} f_3 \cos(\omega_3 t + \Phi_3)$$

(٧,٨) مسائل

السؤال الأول:

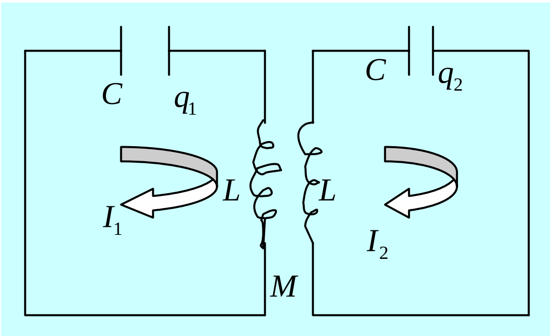
أوجد معادلات الحركة لكل ذرة في جزيء ثاني أكسيد الكربون الموضح في الشكل (٦- ٧) على اعتبار أنها تهتز على خط مستقيم، ثم جد الترددات الطبيعية المحتملة لحالات الحركة؟



الشكل (٦- ٧) جزيء ثاني أكسيد الكربون.

السؤال الثاني:

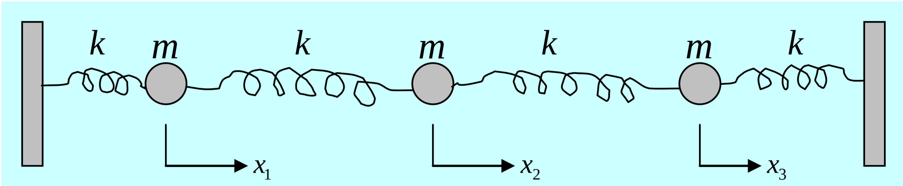
يمثل الشكل (٧- ٧) دائرة كهر بائية (LC) هـزّازة غير متخامدة، إذا و ضعت بالقرب من دائرة كهر بائية مماثلة، سوف تولد الهزات بواسطة التأثير الحثي المتبادل بين الملفين (مقدار المحاثة المتبادلة M)، اكتب معادلات كيرشوف للدارات الكهربائية، ثم اوجد الترددات الطبيعية ؟.



الشكل (٧- ٧) دارة كهر بائية LC.

السؤال الثالث:

ثلاث كتل متماثلة مربوطة بواسطة زنبرك كما في الشكل (٨- ٧)، إذا أزيح النظام عن موضوع الاتزان، احسب الترددات الطبيعية و الإحداثيات الطبيعية، حيث k ثابت الزنبرك ؟.



الشكل (٨- ٧) ثلاث كتل متماثلة مربوطة بزنبركات متشابهة.

السؤال الرابع:

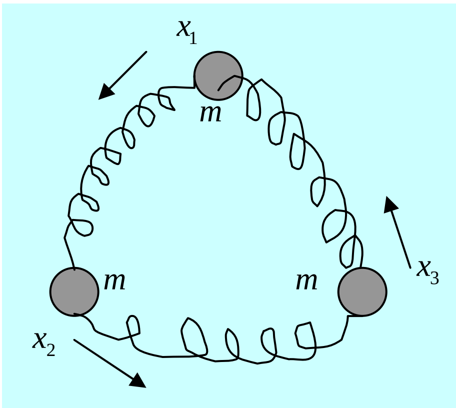
مستخدما النظام المبين في الشكل (٩- ٧) الذي يمثل اهتزازات صغيرة لثلاث كتل متماثلة حول موضع الاتزان على دائرة مثبتة. أوجد:

١- المصفوفة T و المصفوفة V؟

٢- الترددات الطبيعية؟

٣- الإحداثيات الطبيعية؟

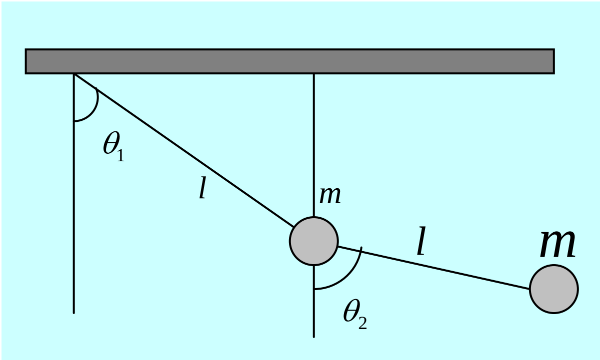
٤- المتجهات المميزة و الحلول العامة ؟



الشكل (٩- ٧) ثلاثة أجسام مرتبطة بزنبركات.

السؤال الخامس:

بندولان مزدوجان كما في الشكل (١٠- ٧)، اوجد المصفوفة V و المصفوفة T و الترددين الطبيعيين للاهتزازات الصغيرة حول نقاط التوازن ؟



الشكل (١٠- ٧) بندولان مزدوجان.

(٧,٩) المراجع

1-E.N. Moore, ”Theoretical Mechanics”, 2nd ed., John-Wiley and Sons, 1988.

2 - Fowles, G.R. and Cassiday, G.L., ”A Addison-Wesley nalytical Mechanics”, 5th ed., Saunders College Publishing, 1993.

3- H.Goldstein, ”Classical Mechanics”, 2nd ed., Addison-Wesley, 1992.

4- L.D. Landau and E.M. Lifshits, ”Mechanics”, 3rd ed., Pergammon Press Ltd., 1976.

5- Marion, J.B. and Thornton, S.T., ”Classical Dynamics of Particles and System”,3rd ed., Acadimic Press,1988.

الانتقالات الفيصلية (القانونية)

CANONICAL TRANSFORMATION

• المقدمة • أقواس بوسون وخصائصها • الانتقالات الفيصلية • الدوال المولدة للانتقالات الفيصلية • التقريب المبسط للانتقالات الفيصلية • أقواس بوسون والانتقالات الفيصلية • جسم صلب مستدير يتدحرج على سطح مستوي مائل • مسائل

(٨,١) المقدمة

لقد عرفنا في الفصل الخامس، أن المعادلات الفيصلية للحركة تعطى بالعلاقات التالية:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \;,\; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \;,\; i = 1, 2, \ldots\ldots, n \qquad (8-1)$$

معادلات هاميلتون للحركة لا تمكننا من حل جميع المسائل الميكانيكية، لذلك لابد من البحث عن طرق أخرى لحل هذه المسائل. من هذه الطرق : طريقة الانتقالات الفيصلية، حيث إننا ننتقل من نظام محدد بإحداثيات الموقع q_i وكمية التحرك p_i إلى نظام محدد بإحداثيات جديدة Q_i وكمية تحرك جديدة P_i ونسمي هذا الانتقال بالانتقال

الفيصلي، إذا كانت الإحداثيات Q_i وكمية التحرك P_i تحقق معادلات الحركة الفيصلية، أي أن :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H(Q,P)}{\partial P_i} \; , \; \dot{P}_i = -\frac{\partial H(Q,P)}{\partial Q_i} \; , \; i = 1,2,....,n \qquad (8-2)$$

حيث (H) هي دالة هاميلتون في الإحداثيات الجديدة، وعلى سبيل المثال : إذا كانت q_i و p_i ترمزان للإحداثيات القديمة للموضع وكمية الحركة، بينما Q_i و P_i الإحداثيات الجديدة للموضع وكمية الحركة، فان التحويل يكون :

$$P_i = P_i(p_1,......., p_n, q_1,......., q_n, t) \qquad (8-3a)$$

$$Q_i = Q_i(p_1,......, p_n, q_1,........, q_n, t) \qquad (8-3b)$$

للاختصار سنكتب المعادلات (٣- ٨) كما يلي :

$$P_i = P_i(p_i, q_i, t) \; , \; Q_i = Q_i(p_i, q_i, t) \qquad (8-4)$$

(٨,٢) أقواس بوسون وخصائصها

(Poisson Brackets and Their Properties)

عند دراسة الانتقالات الفيصلية، لابد من التطرق لكمية تسمى أقواس بوسون(Poisson Bracket) التي سنعرفها كما يلي : إذا عرفنا دالتين f و g بدلالة الإحداثيات المعممة والزخم الخطي q_i و p_i، فان قوس بوسون يعطى بالعلاقة التالية :

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) \qquad (8-5)$$

المشتقة الزمنية الكلية للدالة F حيث $F = F(q_i, p_i, t)$ تكتب كما يلي:

$$\frac{dF}{dt}=\sum_{i=1}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i-\frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\frac{\partial F}{\partial t} \qquad (8-6)$$

وباستخدام المعادلات الفيصلية (١- ٨) نعيد كتابة المعادلة السابقة كالتالي:

$$\frac{dF}{dt}=\sum_{i=1}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial F}{\partial t} \qquad (8-7)$$

وباستخدام تعريف قوس بوسون (٥- ٨) نحصل على :

$$\frac{dF}{dt}=\{F,H\}+\frac{\partial F}{\partial t} \qquad (8-8)$$

وإذا عوضنا بدل F الإحداثيات المعممة q_i أو الزخم الخطي p_i نحصل على معادلات الحركة الفيصلية كما يلي :

$$\dot{q}_i=\{q_i,H\} \qquad (8-9)$$

$$\dot{p}_i=\{p_i,H\} \qquad (8-10)$$

وبذلك نكون قد كتبنا معادلات هاميلتون للحركة بدلالة أقواس بوسون، أي أن المشتقة الزمنية للإحداثيات المعممة هي قوس بوسون للإحداثيات ودالة هاميلتون، والمشتقة الزمنية للزخم المعمم هي قوس بوسون للزخم ودالة هاميلتون.

تحقق أقواس بوسون بعض الخصائص الرياضية المهمة التالية:

١- عدم التماثل (Anti-symmetry)

$$\{f,g\}=-\{g,f\}$$

ويمكن إثبات هذه الخاصية من التعريف مباشرة.

٢- الخطية (Linearity)

$$\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1\{f, h\} + c_2\{g, h\}$$

حيث h دالة بدلالة الإحداثيات المعممة والزخم المعمم.

٣- الضرب (Product Rule)

أي أن :

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$$

٤- محددة جاكوبي (Jacobi's Identity)

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

من السهل إثبات هذه الخصائص باستخدام التعريف (٥- ٨) مباشرة.

دعنا نحسب الأقواس الأساسية (Fundamental Brackets)

$$\{q_i, q_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = 0$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات:

$$\{p_i, p_j\} = 0 \quad , \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

مثال (١-٨):

أوجد أقواس بوسون للدالتين التاليتين :

$$f = q_1^2 + q_2 p_1 \quad , \quad g = q_2^2 + p_1^2$$

الحل:

باستخدام تعريف قوس بوسون(٥- ٨) نجد أن:

$$\{f,g\}=\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial g}{\partial p_1}-\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial g}{\partial q_1}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial g}{\partial p_2}-\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial g}{\partial q_2}\right)$$

$$=(2q_1)(2p_1)-(q_2)(0)+(p_1)(0)-(0)(2q_2)=4q_1p_1$$

مثال (٢-٨):

مستخدما الأقواس الأساسية وخواص أقواس بوسون احسب الأقواس التالية :

١- $\{q^2,p\}$

٢- $\{q+p,q+p\}$

٣- $\{qp,q^2\}$

الحل:

١- $\{q^2,p\}=q\{q,p\}+\{q,p\}q=2q$

٢-

$$\{q+p,q+p\}=\{q,q+p\}+\{p,q+p\}$$

$$=\{q,q\}+\{q,p\}\{p,q\}+\{p,p\}$$

$$=0+1-1+0=0$$

٣ -

$$\begin{aligned}\{qp,q^2\}&=q\{p,q^2\}+\{q,q^2\}p\\&=q\{p,q\}q+q^2\{p,q\}+0\\&=-q^2-q^2=-2q^2\end{aligned}$$

مثال (٣-٨)

أوجد معادلات الحركة للهزاز التوافقي البسيط باستخدام أقواس بوسون؟

الحل:

قيمة دالة هاميلتون للهزاز التوافقي :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k\ q^2$$

معادلات الحركة هي:

$$\dot{q} = \{q, H\}$$

وبتعويض قيمة H نجد أن :

$$\dot{q} = \left\{q, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k\ q^2\right\}$$

وباستخدام خصائص أقواس بوسون نحصل على :

$$= \frac{1}{2m}\{q, p^2\} + \frac{1}{2}k\{q, q^2\}$$

$$= \frac{1}{2m}2p\{q, p\} = \frac{p}{m}$$

أيضا :

$$\dot{p} = \{p, H\} = \left\{p, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k\ q^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}k\{p, q^2\} = kq\{p, q\} = -k\ q$$

(٨,٣) الانتقالات الفيصلية Canonical Transformation

لقد عرفنا الانتقالات الفيصلية فيما سبق وعرفنا من المعادلات(٣- ٨) إن هذه الانتقالات تعطى بالعلاقتين التاليتين :

$$P_i = P_i(q,p,t)\ ,\ Q_i = Q_i(q,p,t) \qquad (8-11)$$

هذه الإحداثيات الجديدة، يجب أن تحقق المعادلات الفيصلية مثل الإحداثيات القديمة q_i و p_i ، أي أن :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}\ ,\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \qquad (8-12)$$

الكمية K التي تظهر في هذه المعادلات هي عبارة عن دالة هاميلتون الجديدة، وهي عبارة عن دالة هاميلتون نفسها، ولكنها معطاة بدلالة الإحداثيات الجديدة Q والزخم P. نحن نعرف من الفصل السادس إن معادلات الحركة تحدد باستخدام مبدأ هاميلتون للتغاير أي أن :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\ dt = 0 \qquad (8-13)$$

وباستخدام تعريف دالة هاميلتون التالية :

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

نحصل على:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) \right] dt = 0 \qquad (8-14)$$

وبنفس الطريقة نستطيع كتابة المعادلة(١٤- ٨) باستخدام الإحداثيات الفيصلية الجديدة Q و P كما يلي :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_i P_i\dot{Q}_i - K\left(Q.P,t\right)\right]dt = 0 \qquad (8-15)$$

وبطرح المعادلة (١٥- ٨) من المعادلة (١٤- ٨) نحصل على :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_i p_i\dot{q}_i - H - \sum_i P_i\dot{Q}_i + K\right]dt = 0 \qquad (8-16)$$

وهذا يعني أن ما بداخل القوسين هو عبارة عن المشتقة الزمنية الكلية لدالة محددة F ، وهذه الدالة تسمى: الدالة المولدة للانتقال، وبعبارة أخرى :

$$\left[\sum_i p_i\dot{q}_i - H - \sum_i P_iQ_i + K\right] \equiv \frac{dF}{dt} \qquad (8-17)$$

من الواضح أن F هي دالة، بدلالة الإحداثيات القديمة والجديدة بالإضافة للزمن. إن الانتقال هو انتقال فيصلي، إذا كان التفاضل الكلي للدالة المولدة تفاضلا تاما. أي أن dF تفاضل تام :

$$\sum_i p_i\ dq_i - \sum_i P_i\ dQ_i = dF$$

و

$$K = H$$

مثال (٤-٨)

أثبت أن الانتقال $Q = p$ و $P = -q$ هو انتقال فيصلي حيث $K = H$

الحل:

$$dF = pdq - PdQ = pdq + qdp = d(qp)$$

إذن dF تفاضل تام، لأن : $F = qp + const.$ وهذا يعني أن الانتقال فيصلي.

(٨,٤) الدوال المولدة للانتقالات الفيصلية

الدالة المولدة : هي دالة تعطى بدلالة $4n$ من الإحداثيات (الإحداثيات القديمة والإحداثيات الجديدة) بالإضافة للزمن. واستخدام العلاقة (١١- ٨) يقلص عدد الإحداثيات إلى $2n$ بدلا من $4n$ ، وذلك لأنه ليس من المناسب خلط المتغيرات في نظرية الانتقالات، فإذا اخترنا احد الإحداثيات القديمة لتكون موجودة في الدالة المولدة، فيجب أن نختار جميع هذه الإحداثيات، ونفس الحكم بالنسبة للإحداثيات الجديدة، لذلك يوجد أربعة أنواع من الدوال المولدة للاقترانات الفيصلية وهي :

$$F_1(q,Q,t) \quad , \quad F_2(q,P,t) \quad , \quad F_3(p,Q,t) \quad , \quad F_4(p,P,t)$$

كل نوع من هذه المولدات سوف يحقق معادلات معينة، بحيث أن هذه المعادلات تؤدي إلى انتقالات فيصلية، علما بان الدّالة المولدة ليست وحيدة، أي انه من الممكن أن يكون للانتقال ألفيصلي أكثر من دالة مولدة. وفيما يلي سوف نشتق معادلات الدوال المولدة باستخدام المعادلة (١٧- ٨) فنحصل على معادلة الدالة المولدة كما يلي :

$$\sum_i p_i\dot{q}_i - H - \sum_i \dot{Q}_i P_i + K = \frac{dF_1}{dt} \qquad (8-18)$$

لكن $F_1 = F_1(q,Q,t)$ لذلك :

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\ \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\ \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} \qquad (8-19)$$

بمساواة معاملات $\dot{Q}_i$ و $\dot{q}_i$ في المعادلتين نحصل على :

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \; , \; P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \; , \; K - H = \frac{\partial F_1}{\partial t} \qquad (8-20)$$

بحل المعادلة الأولى، نحصل على Q_i بدلالة p_i و q_i و t وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على P_i بدلالة p_i و q_i و t، وإذا كانت الدالة المولدة F_1 لا تعتمد على الزمن بصراحة، فان المعادلة الثالثة تثبت أن H , K لهما نفس القيمة العددية. النوع الثاني من الدوال المولدة هو :

$$F(q,P,t) = F_2(q,P,t) - \sum_i P_i \, Q_i$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \sum_i \dot{Q}_i P_i - \sum_i Q_i \dot{P}_i \qquad (8-21)$$

وبمساواة هذه المعادلة مع المعادلة (٨ -١٧) نحصل على :

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \; , \; Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \; , \; K = \frac{\partial F_2}{\partial t} + H \qquad (8-22)$$

وبنفس الطريقة نحصل على النوع الثالث :

$$F = F_3(p,Q,t) + \sum_i q_i \; p_i$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_3}{\partial p_i}\dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F_3}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_3}{\partial t} + \sum_i \dot{q}_i \; p_i + \sum_i q_i \; \dot{p}_i$$

أيضا بالمساواة مع المعادلة (٨ -١٧):

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \; , \; P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \; , \; \frac{\partial F_3}{\partial t} + H = K \qquad (8-23)$$

أما النوع الرابع فيكتب كما يلي :

$$F = \sum_i q_i \; p_i - \sum_i Q \;\; P_i + F_4(p,P,t)$$

حيث أن :

$$\frac{dF}{dt}=\sum_i \dot{q}_i p_i+\sum_i q_i \dot{p}_i-\sum_i \dot{Q}_i P_i-\sum_i Q_i \dot{P}_i$$

$$+\sum_i \frac{\partial F_4}{\partial p_i}\dot{p}_i+\sum_i \frac{\partial F_4}{\partial P_i}\dot{P}_i+\frac{\partial F_4}{\partial t} \qquad (8-24)$$

بمساواة (٢٤- ٨) مع (١٧- ٨) :

$$q_i=-\frac{\partial F_4}{\partial p_i}\ ,\ Q_i=\frac{\partial F_4}{\partial P_i}\ ,\ K=H+\frac{\partial F_4}{\partial t} \qquad (8-25)$$

وحتى نفهم أهمية هذه العلاقات ندرس المثال التالي :

مثال (٥-٨)

إذا علمت الدالة $F_1(q,Q,t)$ ، هي دالة مولدة للانتقال الفيصلي، ومعطاة بالعلاقة التالية :

$$F_1(q,Q,t)=-\frac{1}{3m^2 g}\left\{2m^2 g(Q-q)\right\}^{\frac{3}{2}}$$

حيث (m) كتلة جسيم يسقط سقوطا حراً، و q ترمز للإحداثيات العمودية و g تسارع الجاذبية الأرضية، فجد الإحداثيات الجديدة لهذا الانتقال الفيصلي ؟

الحل:

$$p=\frac{\partial F_1}{\partial q}=\left\{2m^2 g(Q-q)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

أي أن :

$$Q = q + \frac{p^2}{2m^2 g}$$

أيضا :

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \{2m^2 g(Q-q)\}^{\frac{1}{2}}$$

إذن:

$$P = p$$
$$K = H = \frac{p^2}{2m} + mg\ q = mg\ Q$$

المعادلات الفيصلية بدلالة الإحداثيات الجديدة هي :

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0 \quad , \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -mg$$

ومن السهل حل هاتين المعادلتين :

$$Q = const. = c_1$$

و $P = -mg\ t + c_2$

وبالتعويض في المعادلات القديمة نحصل على :

$$q = Q - \frac{p^2}{2m^2 g} = Q - \frac{P^2}{2m^2 g}$$
$$q = c_1 - \frac{(-mg\ t + c_2)^2}{2m^2 g} = -\frac{1}{2} g\ t^2 + \alpha\ t + \beta$$

حيث β و α ثابتان.

$$p = P = -mg\ t + c_2$$

وهذا هو الحل المعروف للسقوط الحر.

(٨,٥) التقريب البسيط للانتقالات الفيصلية

تستخدم طريقة المصفوفات لمعرفة الانتقال، هل هو انتقال فيصلي؟ أو غير ذلك؟ دعنا نعرف الانتقالات التالية:

$$Q_i = Q_i(q,p) \qquad (8-26)$$

$$P_i = P_i(q,p) \qquad (8-27)$$

المشتقة الزمنية الكلية للمعادلة (٢٦- ٨) تعطى بالعلاقة التالية :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\dot{p}_j$$

وباستخدام المعادلات الفيصلية للحركة نحصل على :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (8-28)$$

وبشكل مشابه نحصل على :

$$\dot{P}_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (8-29)$$

ومن المعلوم أن معكوس الانتقالات (٢٦- ٨) و (٢٧- ٨) يحسب كما يلي:

$$q_j = q_j(Q,P) \qquad (8-30)$$

$$p_j = p_j(Q,P) \qquad (8-31)$$

دعنا الآن نحسب المشتقات التالية :

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \qquad (8-32)$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q_i}=\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}+\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \qquad (8-33)$$

وحتى تكون الانتقالات فيصلية ، فلا بد للإحداثيات الجديدة أن تحقق معادلات الحركة الفيصلية ، أي أن :

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial H}{\partial P_i}$$

$$\dot{P}_i=-\frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

وهذه الشروط تتحقق فقط إذا تحققت العلاقات التالية :

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}=\frac{\partial p_j}{\partial P_i} \qquad (8-34)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}=-\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \qquad (8-35)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j}=\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \qquad (8-36)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j}=-\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \qquad (8-37)$$

هذه هي الشروط المباشرة، حتى يكون الانتقال فيصليا ، وتسمى الشروط المبسطة (simplistic condition). الآن سنصيغ هذه العلاقات باستخدام المصفوفات على النحو التالي :

إذا كان لدينا نظام يتكون من n درجة حرية ، يحتوي على الإحداثيات المعممة q_i ، والزخم المعمم p_i حيث $(i=1,2,.....,n)$ إذن نستطيع تركيب المصفوفة التي تحتوي على عمود واحد (column matrix) ولنسميها η وتحتوي على $2n$ عنصر بحيث :

$$\eta_i = q_i \;,\; \eta_{i+n} = p_i \quad i = (1,2,\dots,n) \qquad (8-38)$$

وبنفس الطريقة نعرف المصفوفة ذات العمود الواحد $\frac{\partial H}{\partial \eta}$ التي تحتوي العناصر التالية :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \;,\; \left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_{i+n} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (8-39)$$

نفرض (J) مصفوفة مربعة $(2n \times 2n)$ تعطى بالشكل التالي :

$$J = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \qquad (8-40)$$

حيث $1_{n\times n}$ مصفوفة أحادية و $0_{n\times n}$ مصفوفة صفرية ، فعلى سبيل المثال إذا كانت $n = 2$ فان هذه المصفوفة تأخذ الشكل التالي :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ألان تكتب معادلة هاميلتون للحركة بشكل ملائم باستخدام المصفوفات كما يلي :

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta} \qquad (8-41)$$

وبشكل عام :

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ .. \\ . \\ \dot{\eta}_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \eta_1} \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial H}{\partial \eta_{2n}} \end{bmatrix} \qquad (8-42)$$

من السهل إثبات أن (J) مصفوفة متعامدة :

$$J^T J = 1$$

أيضاً:

$$J^2 = -1 \quad , \quad J^T = -J = J^{-1}$$

لقد رمزنا للإحداثيات القديمة q_i و p_i بالرموز η_i و η_{n+i} والآن نرمز للإحداثيات الجديدة Q_i و P_i بالرموز ξ_i و ξ_{n+i} أي أن :

$$\xi = \xi(\eta)$$

إذن :

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j$$

وباستخدام المصفوفات تكتب هذه المشتقة الزمنية كما يلي :

$$\dot{\xi} = M \ \dot{\eta}$$

حيث M مصفوفة جاكوبي للانتقال وتحتوي على العناصر :

$$M_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}$$

وباستخدام المعادلة (٤١- ٨) نحصل على :

$$\dot{\xi} = MJ\frac{\partial H}{\partial \eta} \qquad (8-43)$$

لكن :

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \frac{\partial H}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_i} = M_{ji}\frac{\partial H}{\partial \xi_j}$$

وباستخدام رموز المصفوفات تكتب كما يلي :

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = M^T\frac{\partial H}{\partial \xi}$$

إذن :

$$\dot{\xi} = MJM^T\frac{\partial H}{\partial \xi} \qquad (8-44)$$

وحتى يكون الانتقال فيصليا ، يجب أن تحقق الإحداثيات الجديدة معادلات الحركة الفيصلية التي تكتب باستخدام المصفوفات مقارنة بالمعادلة (٤١- ٨) كما يلي :

$$\dot{\xi} = J\frac{\partial H}{\partial \xi} \qquad (8-45)$$

وبمساواة المعادلتين (٤٤- ٨) و (٤٥- ٨) نحصل على :

$$M\,J\,M^T\frac{\partial H}{\partial \xi} = J\frac{\partial H}{\partial \xi}$$

وبذلك يكون الانتقال فيصليا إذا حقق المعادلة :

$$MJM^T = J \qquad (8-46)$$

مثال (٦-٨)

اثبت أن الانتقال التالي هو انتقال فيصلي ؟

$$Q = \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right) \quad , \quad P = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right)$$

الحل :

في البداية نحسب المصفوفة (M) التي تحتوي على العناصر :

$$M_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}$$

هنا $i\,,\, j = 1,2$ بحيث :

$$\xi_1 = Q \quad , \quad \xi_2 = P \quad , \quad \eta_1 = q \quad , \quad \eta_2 = p$$

لذلك تحسب المصفوفة كما يلي :

$$M = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1/p}{1+(q/p)^2} & \dfrac{\left(-q/p^2\right)}{1+(q/p)^2} \\ q & p \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} \dfrac{1/p}{1+(q/p)^2} & q \\ \dfrac{\left(-q/p^2\right)}{1+(q/p)^2} & p \end{bmatrix}$$

وفي هذه الحالة تكتب المصفوفة (J) كما يلي:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث عدد درجات الحرية يساوي واحد، وباستخدام خاصية ضرب المصفوفات نحصل على :

$$JM = \begin{bmatrix} q & p \\ \dfrac{(-1/p)}{1+(q/p)^2} & \dfrac{(q/p^2)}{1+(q/p)^2} \end{bmatrix}$$

وبنفس الطريقة نجد :

$$M^T J\ M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = J$$

لذلك نقول أن الانتقال فيصلي.

مثال (٧-٨)

اثبت أن الانتقال التالي هو انتقال فيصلي ؟

$$Q_1 = q_1 \quad , \quad P_1 = p_1 - 2p_2$$
$$Q_2 = p_2 \qquad P_2 = -2q_1 - q_2$$

الحل :

تكتب المصفوفة (M) في هذه الحالة كما يلي :

$$M = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial P_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial P_1}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial P_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial p_2} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

وبما أن النظام يحتوي على درجتي حرية، لذلك تكتب المصفوفة (J) كما يلي :

$$J = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & 1_{2\times2} \\ -1_{2\times2} & 0_{2\times2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$JM^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أيضاً:

$$M\,J\,M^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J$$

إذن الانتقال فيصلي.

(٨,٦) أقواس بوسون والانتقالات الفيصلية

لقد عرفنا في فقرات سابقة أقواس بوسون، وهنا نود أن نكتب هذا التعريف بدلالة المصفوفات، لاستخدام هذه الأقواس في دراسة الانتقالات الفيصلية. يمكن كتابة تعريف قوس بوسون (٥- ٨) باستخدام المصفوفات كما يلي :

$$\{f\,,g\}_\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^T J\,\frac{\partial g}{\partial \eta} \qquad (8-47)$$

لكن أقواس بوسون الأساسية :

$$\{q_j, q_k\}_{q,p} = 0 \quad = \quad \{p_j, p_k\}_{q,p}$$
$$\{q_j, p_k\}_{q,p} = \delta_{jk} = -\{p_j, q_k\}_{q,p}$$

يمكن أن تكتب على شكل مصفوفة كما يلي :

$$\{\eta,\eta\}_\eta = J \qquad (8-48)$$

لكننا رمزنا للإحداثيات الجديدة بالرمز ξ :

$$\xi \equiv \xi(\eta) \qquad (8-49)$$

وباستخدام العلاقة (٤٧- ٨) يتبين أن :

$$\{\xi,\xi\}_\eta = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right)^T J\,\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = M^T J\, M \qquad (8-50)$$

حيث :

$$M = \frac{\partial \xi}{\partial \eta}$$

وحتى يكون الانتقال فيصليا، يجب أن تتحقق العلاقة (٤٦- ٨) أي أن :

$$M^T JM = J$$

وهذه النتيجة توصلنا إلى الشرط التالي: وهو إذا تحققت العلاقة:

$$\{\xi,\xi\}_\eta = J \qquad (8-51)$$

فإن الانتقال يكون انتقالا فيصليا ، وبهذا نكون قد أوجدنا طريقة ثانية للتحقق من الانتقالات إذا كانت فيصلية أو غير ذلك.

نستطيع كتابة العلاقة (٥١- ٨) بصيغ أخرى كما سيأتي :

إذا كانت الإحداثيات الجديدة تحقق العلاقات التالية:

$$\{\dot{Q},Q\}_{q,p} = \{P,P\}_{q,p} = 0$$
$$\{Q,P\}_{q,p} = 1 = -\{P,Q\}_{q,p}$$

فإن الانتقال يكون فيصليا.

مثال (٨-٨)

استخدم أقواس بوسون لإثبات أن الانتقال التالي هو انتقال فيصلي ؟

$$Q = \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right) \quad , \quad P = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right)$$

الحل:

إذا تحققت العلاقة (٥١- ٨) لهذا الانتقال، فإنة فيصلي :

$$\{\xi,\xi\}_\eta \equiv \begin{bmatrix} \{Q,Q\}_{q,p} & \{Q,P\}_{q,p} \\ \{P,Q\}_{q,p} & \{P,P\}_{q,p} \end{bmatrix}$$

ونحسب أقواس بوسون كما يلي :

$$\{Q,Q\}_{q,p}=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}=0$$

$$\{Q,P\}_{q,p}=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}=1=-\{P,Q\}_{q,p}$$

$$\{P,P\}_{q,p}=\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}=0$$

إذن:

$$\{\xi,\xi\}_{\eta}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=J$$

وهذا يعني أن الانتقال فيصلي.

مثال (٩-٨)

اثبت أن الانتقال:

$$Q_1=q_1^2 \qquad , \qquad Q_2=q_2\sec\, p_2$$

$$P_1=\frac{p_1\cos p_2-2q_2}{2q_1\cos p_2} \qquad , \qquad P_2=\sin p_2-2q_1$$

هو انتقال فيصلي باستخدام أي طريقة تختارها ، واوجد الدالة المولدة المناسبة المؤدية لهذا الانتقال ؟

الحل :

سوف نترك إثبات أن الانتقال فيصلي للطالب. ونهتم هنا بإيجاد الدالة المولدة من النوع الثالث $F_3(p,Q)$.

$$q_1 = \sqrt{Q_1} \qquad , \qquad q_2 = \frac{Q_2}{\sec p_2} = Q_2 \cos p_2$$

$$P_1 = \frac{p_1 \cos p_2 - 2Q_2 \cos p_2}{2\sqrt{Q_1}\cos p_2} = \frac{p_1 - 2Q_2}{2\sqrt{Q_1}}$$

$$P_2 = \sin p_2 - 2\sqrt{Q_1}$$

وبهذا نكون قد حصلنا على : q_1 , q_2 , P_1 , P_2 بدلالة Q_1 , Q_2 , p_1 , p_2
وباستخدام المعادلات (٢٣- ٨) نحصل على المعادلات التالية :

المعادلة الأولى :
$$q_1 = -\frac{\partial F_3}{\partial p_1} = \sqrt{Q_1}$$

المعادلة الثانية :
$$q_2 = -\frac{\partial F_3}{\partial p_2} = Q_2 \cos p_2$$

المعادلة الثالثة :
$$P_1 = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_1} = \frac{p_1 - 2Q_2}{2\sqrt{Q_1}}$$

المعادلة الرابعة:
$$P_2 = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_2} = \sin p_2 - 2\sqrt{Q_1}$$

من المعادلة الأولى نجد :

$$F_3(p_1, p_2, Q_1, Q_2) = -\sqrt{Q_1}\ p_1 + f(p_2, Q_1, Q_2)$$

بالتعويض في المعادلة الثانية نجد :

$$-\frac{\partial f}{\partial p_2} = Q_2 \cos p_2$$

بإجراء التكامل نحصل على :

$$f = -Q_2 \sin p_2 + g(Q_1, Q_2)$$

إذن:

$$F_3 = -\sqrt{Q_1}\, p_1 - Q_2 \sin p_2 + g(Q_1, Q_2)$$

وبتعويض هذه النتيجة في المعادلة الثالثة نحصل على:

$$\frac{p_1}{2\sqrt{Q_1}} - \frac{\partial g}{\partial Q_1} = \frac{p_1 - 2Q_2}{2\sqrt{Q_1}}$$

إذن:

$$\frac{\partial g}{\partial Q_1} = \frac{Q_2}{\sqrt{Q_1}}$$

ومنها نحصل على:

$$g = 2Q_2\sqrt{Q_1} + h(Q_2)$$

وبتعويض قيمة g نحصل على :

$$F_3 = -\sqrt{Q_1}\, p_1 - Q_2 \sin p_2 + 2Q_2\sqrt{Q_1} + h(Q_2)$$

باستخدام المعادلة الرابعة نجد أن :

$$\sin p_2 - 2\sqrt{Q_1} - \frac{\partial h}{\partial Q_2} = \sin p_2 - 2\sqrt{Q_1} - \frac{\partial h}{\partial Q_2} = 0$$

أي أن :

$$h(Q_2) = const.$$

والآن نحصل على الدالة المولدة لهذا الانتقال :

$$F_3 = -\sqrt{Q_1}\ p_1 - Q_2 \sin p_2 + 2\, Q_2\ \sqrt{Q_1} + const.$$

مثال (٨-١٠)

أوجد الشروط التي تجعل الانتقال التالي انتقالا فيصليا ؟

$$Q = \alpha \frac{p}{x} \quad , \quad P = \beta\, x^2$$

حيث β و α ثابتان.

الحل:

مستخدما أقواس بوسون :

$$\{Q,Q\} = \{P,P\} = 0$$
$$\{Q,P\} = \alpha\ \beta \left\{ \frac{p}{x}, x^2 \right\} = \alpha\ \beta \{p,x\} = -2\alpha\ \beta$$

وهذه القيمة يجب أن تساوي واحد ، أي أن :

$$-2\alpha\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{-1}{2\alpha}$$

(٨,٧) الحلول العامة باستخدام أقواس بوسون

لقد عرفنا مما سبق، إن معادلات الحركة يمكن أن تكتب بدلالة أقواس بوسون كما يلي :

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \qquad (8-52)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} \qquad (8-53)$$

هذه المعادلات، هي معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى (First Order)، يمكن حلها للحصول على q_i و p_i بدلالة الزمن t، لكن هناك طريقة أخرى لإيجاد هذه الحلول، وذلك باستخدام متسلسلة تيلر عند شروط ابتدائية كما سيتضح :

$$u(t) = u_0 + t\left.\frac{du}{dt}\right|_0 + \frac{t^2}{2\,!}\left.\frac{d^2u}{dt^2}\right|_0 + \frac{t^3}{3\,!}\left.\frac{d^3u}{dt^3}\right|_0 + \ldots \qquad (8-54)$$

لكن المشتقة الأولى تعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{du}{dt} = \{u, H\}$$

إذن تكتب المشتقة الثانية والثالثة على الترتيب كما يلي :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}\{u, H\} = \{\{u, H\}, H\}$$

$$\frac{d^3u}{dt^3} = \frac{d}{dt}\{\{u, H\}, H\} = \{\{\{u, H\}, H\}, H\}$$

وبالتعويض في المعادلة (٨ -٥٤) نحصل على :

$$u(t) = u_0 + \frac{t}{1\,!}\{u,H\}_0 + \frac{t^2}{2\,!}\{\{u,H\},H\}_0 + \frac{t^3}{3\,!}\{\{\{u,H\},H\},H\}_0 + \ldots\ldots \qquad (8-55)$$

وإشارة الصفر تعني حساب أقواس بوسون عند النقطة الابتدائية $t = 0$.

مثال (٨-١١)

جسيم كتلته m يتحرك في خط مستقيم بتسارع ثابت a، دالة هاملتون له:

$$H=\frac{p^2}{2m}-m\,a\,x$$

اوجد الإزاحة $x(t)$ مستخدما متسلسلة تيلر ؟

الحل:

معتمدا على العلاقة (٥٥- ٨)

$$u(t)=u_0+\frac{t}{1!}\{u,H\}_0+\frac{t^2}{2!}\{\{u,H\},H\}_0+\frac{t^3}{3!}\{\{\{u,H\},H\},H\}_0+......$$

بما أن :

$$\{x,H\}=\left\{x\,,\frac{p^2}{2m}-m\,a\,x\right\}=\frac{p}{m}\,,\ \{x,H\}_0=\frac{p_0}{m}$$

$$\{\{x,H\},H\}=\left\{\frac{p}{m},\frac{p^2}{2m}-m\,a\,x\right\}=+a\,,\ \{\{x,H\},H\}_0=a$$

$$\{\{\{x,H\},H\},H\}=\{a,H\}=0$$

تكون بقية الحدود تساوي صفر و نحصل على :

$$x(t)=x_0+\frac{p_0}{m}t+\frac{1}{2}a\,t^2+0+0+.....$$

ونحن نعرف أن $\frac{p_0}{m}=\upsilon_0$ ولهذا $x(t)=x_0+\upsilon_0 t+\frac{1}{2}a\,t^2$

وهذا هو الحل المعروف لهذه المسألة.

(٨،٨) مسائل

السؤال الأول:

احسب أقواس بوسون التالية :

$$\{L_x, L_y\} \quad , \quad \{L_y, L_z\} \quad , \quad \{L_z, L_x\}$$

السؤال الثاني:

اثبت أن الانتقالات التالية هي انتقالات فيصليه ؟

$$Q_1 = \frac{q_1}{\sqrt{2}} - \frac{p_1}{\sqrt{2}} \qquad , \qquad P_1 = \frac{q_1}{\sqrt{2}} + \frac{p_1}{\sqrt{2}}$$

$$Q_2 = \frac{q_2}{\sqrt{2}} = \frac{p_2}{\sqrt{2}} \qquad , \qquad P_2 = \frac{q_2}{\sqrt{2}} + \frac{p_2}{\sqrt{2}}$$

السؤال الثالث:

اثبت أن الانتقالات التالية هي انتقالات فيصليه :

$$Q_1 = q_1 + \varepsilon \qquad , \qquad P_1 = p_1$$

$$Q_2 = q_2 + \varepsilon \qquad , \qquad P_2 = p_2$$

$$Q_3 = q_3 + \varepsilon \qquad , \qquad P_3 = p_3$$

حيث ε مقياس صغير جداً ؟

السؤال الرابع :

أحسب $\{A_1, A_2\}$ حيث :

$$A_1 = \frac{1}{4}\left(x^2 + P_x^2 - y^2 - P_y^2\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(xy + P_x P_y\right)$$

السؤال الخامس :

دالة هاميلتون لنظام معين تعطى بالمعادلة التالية :

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right)$$

أ) استخدم طريقة بوسون لإثبات أن :

$$F = \frac{1}{2} p^2 q^4 + \frac{1}{2\, q^2} + c$$

هو ثابت الحركة ؟

ب) اوجد الانتقال ألفيصلي الذي يحول دالة هاميلتون المعطاة في هذه المسألة إلى دالة هاميلتون في حالة الهزاز التوافقي ؟

جـ) باستخدام الشرط المبسط اثبت أن الانتقال التالي هو فيصلي ؟

$$Q = \frac{q}{\sqrt{2}} - \frac{p}{\sqrt{2}}$$
$$P = \frac{q}{\sqrt{2}} + \frac{p}{\sqrt{2}}$$

السؤال السادس :

دالة لاجرانج لمذبذب توافقي أحادي البعد تكتب على الصورة :

$$L = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k\, x^2$$

أوجد :

أ) دالة هاميلتون ومعادلات الحركة باستخدام أقواس بوسون.

ب) الإزاحة $x(t)$ مستخدما متسلسلة تايلور وأقواس بوسون.

(٨،٩) المراجع

1- R.A. Matzner and L.C. Shepley, ”Classical Mechanics”, 4th ed., Prentice-Hall Inc., 1991.

2- Fowles, G.R. and Cassiday, G.L., ”A Addison-Wesley nalytical Mechanics”, 5th ed., Saunders College Publishing, 1993.

3- L.D. Landau and E.M. Lifshits, ”Mechanics”, 3rd ed., Pergammon Press Ltd., 1976.

4- E.N. Moore, ”Theoretical Mechanics”, 2nd ed., John-Wiley and Sons, 1988.

5- H. Goldstein, ”Classical Mechanics”, 2nd ed., Addison-Wesley, 1992.

قائمة بالمصطلحات العلمية

أولاً: عربي - إنجليزي

أ

اتزان	Equilibrium
اتزان غير مستقر	Unstable equilibrium
اتزان مستقر	Stable equilibrium
الأجسام الجاسئة	Rigid bodies
الإحداثيات الاسطوانية	Cylindrical coordinate
الإحداثيات الدورية	Cyclic coordinates
الإحداثيات الطبيعية	Normal coordinates
الإحداثيات الكروية	Spherical coordinate
الإحداثيات المتعامدة	Cartesian coordinate
الإحداثيات المعممة	Generalized velocity
الأقواس الأساسية	Fundamental brackets
أقواس بوسون	Poisson brackets
الانتقالات الفيصلية	Canonical transformations
الاهتزازات الصغيرة	Small oscillation

ت

التحويل (الانتقال)	Transformation

Gradient	التدرج
Frequency	التردد
Angular frequency	التردد الزاوي
Uniform acceleration	التسارع المنتظم
Simplistic approach	التقريب المبسط

ج

Gravity	الجاذبية
Particle	جسيم
Magnetic vector potential	الجهد المغناطيسي المتجه

ح

Oscillatory motion	الحركة الاهتزازية
Simple harmonic motion	الحركة التوافقية البسيطة
Rectilinear motion	الحركة الخطية
One-dimensional motion	الحركة في بعد واحد
Calculus of variation	حساب التغاير
Conservation of energy	حفظ الطاقة
General solution	الحل العام

د

Hamiltonian function	دالة هاميلتون
Degrees of freedom	درجات الحرية
Generalized momentum	الدوال المولدة

ر

First order	الرتبة الأولى

ز

Phase angle	زاوية الطور

Linear momentum	الزخم الخطي (كمية التحرك)
Generating function	الزخم المعمم
Period	الزمن الدوري

س

Terminal velocity	السرعة الحدية
Velocity	السرعة المتجهة
Generalized force	السرعة المعممة
Amplitude	سعة الاهتزاز

ش

Orthonormality condition	شرط التعامد القياسي
Normalized condition	شرط التقييس
Simplistic condition	الشرط المبسط

ص

Explicit	صراحة

ط

Potential energy	طاقة الوضع

ع

Ant symmetry	عدم التماثل
Element of arc length	عنصر الطول القوسي

ق

Chain rule	قاعدة السلسلة
Product rule	قاعدة الضرب
Newton's first law	قانون نيوتن الأول
Hook's low	قانون هوك
Parabola	قطع زائد

Conservation low	قوانين الحفظ
Force	قوة
Restoring force	قوة الإرجاع
External force	القوة الخارجية
Electromagnetic force	القوة الكهرومغناطيسية
Generalized coordinate	القوة المعممة
Constant force	قوة ثابتة
Lorentz force	قوة لورنتز
Impulsive force	القوى الدفعية
Stationary value	قيمة قصوى
Holonomic constraints	قيود تامة التقييد
Non- Holonomic constraints	قيود غير تامة التقييد

ك

Mass	الكتلة
N-degree polynomial	كثير الحدود من الدرجة

م

Superposition principle	مبدأ التراكب
Hamilton's principle	مبدأ هاميلتون
Eigenvectors	المتجهات المميزة
Taylor series	متسلسلة تايلور
Several dependent variables	المتغيرات متعددة التوابع
Orthogonal set	مجموعة تعامد
Orthonormal set	مجموعة تعامد قياسي
Normalized set	مجموعة قياسية
Jacobi's identity	محددة جاكوبي
Identity matrix	مصفوفة الوحدة

Column matrix	مصفوفة تحتوي على عمود واحد
Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Orthogonal matrix	مصفوفة متعامدة
Symmetric matrix	مصفوفة متناظرة
Lagrange multipliers	مضاعفات لاجرانج
Canonical equations of motion	معادلات الحركة الفيصلية (القانونية)
Equation	معادلة
Euler equation	معادلة اويلر
Coefficient of kinetic friction	معامل الاحتكاك الحركي
Coefficient of kinetic friction	معامل الاحتكاك السكوني
Position	موضع (موقع)
Terminal position	الموقع النهائي
Newtonian mechanics	ميكانيكا نيوتن

ن

Conservative system	النظام المحافظ
Closed system	النظام المغلق
Constrained system	النظام المقيد
Work energy theorem	نظرية الشغل والطاقة
Inertial reference system	نظم محاور الإسناد القصورية
Turning point	نقطة الرجوع

و

Gaussian units	وحدات جاوس

ثانياً: إنجليزي - عربي

A

Amplitude	سعة الاهتزاز
Angular frequency	التردد الزاوي
Ant symmetry	عدم التماثل

C

Calculus of variation	حساب التغاير
Canonical equations of motion	معادلات الحركة الفيصلية (القانونية)
Canonical transformations	الانتقالات الفيصلية
Cartesian coordinate	الإحداثيات المتعامدة
Chain rule	قاعدة السلسلة
Closed system	النظام المغلق
Coefficient of kinetic friction	معامل الاحتكاك الحركي
Coefficient of kinetic friction	معامل الاحتكاك السكوني
Column matrix	مصفوفة تحتوي على عمود واحد
Conservation low	قوانين الحفظ
Conservation of energy	حفظ الطاقة
Conservative system	النظام المحافظ
Constant force	قوة ثابتة
Constrained system	النظام المقيد
Cyclic coordinates	الإحداثيات الدورية
Cylindrical coordinate	الإحداثيات الاسطوانية

D

Degrees of freedom	درجات الحرية

Diagonal matrix	مصفوفة قطرية

E

Eigenvectors	المتجهات المميزة
Electromagnetic force	القوة الكهرومغناطيسية
Element of arc length	عنصر الطول القوسي
Equation	معادلة
Equilibrium	اتزان
Euler equation	معادلة اويلر
Explicit	صراحة
External force	القوة الخارجية

F

First order	الرتبة الأولى
Force	قوة
Frequency	التردد
Fundamental brackets	الأقواس الأساسية

G

Gaussian units	وحدات جاوس
General solution	الحل العام
Generalized coordinate	القوة المعممة
Generalized force	السرعة المعممة
Generalized momentum	الدوال المولدة
Generalized velocity	الإحداثيات المعممة
Generating function	الزخم المعمم
Gradient	التدرج
Gravity	الجاذبية

H

Hamilton's principle	مبدأ هاميلتون
Hamiltonian function	دالة هاميلتون
Holonomic constraints	قيود تامة التقييد
Hook's low	قانون هوك

I

Identity matrix	مصفوفة الوحدة
Impulsive force	القوى الدفعية
Inertial reference system	نظم محاور الإسناد القصورية

J

Jacobin's identity	محددة جاكوبي

L

Lagrange multipliers	مضاعفات لاجرانج
Linear momentum	الزخم الخطي (كمية التحرك)
Lorentz force	قوة لورنتز

M

Magnetic vector potential	الجهد المغناطيسي المتجه
Mass	الكتلة

N

N-degree polynomial	كثير الحدود من الدرجة
Newton's first law	قانون نيوتن الأول
Newtonian mechanics	ميكانيكا نيوتن
Non- Holonomic constraints	قيود غير تامة التقييد

Normal coordinates	الإحداثيات الطبيعية
Normalized condition	شرط التقييس
Normalized set	مجموعة قياسية

O

One-dimensional motion	الحركة في بعد واحد
Orthogonal matrix	مصفوفة متعامدة
Orthogonal set	مجموعة تعامد
Orthonormal set	مجموعة تعامد قياسي
Orthonormality condition	شرط التعامد القياسي
Oscillatory motion	الحركة الاهتزازية

P

Parabola	قطع زائد
Particle	جسيم
Period	الزمن الدوري
Phase angle	زاوية الطور
Poisson brackets	أقواس بوسون
Position	موضع (موقع)
Potential energy	طاقة الوضع
Product rule	قاعدة الضرب

R

Rectilinear motion	الحركة الخطية
Restoring force	قوة الإرجاع
Rigid bodies	الأجسام الجاسئة

S

Several dependent variables	المتغيرات متعددة التوابع
Simple harmonic motion	الحركة التوافقية البسيطة
Simplistic approach	التقريب المبسط
Simplistic condition	الشرط المبسط
Small oscillation	الاهتزازات الصغيرة
Spherical coordinate	الإحداثيات الكروية
Stable equilibrium	اتزان مستقر
Stationary value	قيمة قصوى
Superposition principle	مبدأ التراكب
Symmetric matrix	مصفوفة متناظرة

T

Taylor series	متسلسلة تايلور
Terminal position	الموقع النهائي
Terminal velocity	السرعة الحدية
Transformation	التحويل (الانتقال)
Turning point	نقطة الرجوع

U

Uniform acceleration	التسارع المنتظم
Unstable equilibrium	اتزان غير مستقر

V

Velocity	السرعة المتجهة

W

Work energy theorem	نظرية الشغل والطاقة

Summary of Classical Mechanics Book

By:Dr. Ayman M. Al Sawalha ,
Dr.Abdulaziz A. Al Mulhim
Dr.Eqab M. Rabee

This book is intended primarily for an undergraduate course in classical mechanics taken by student majoring in physics.

This book contains eight chapters; begin with a brief introduction to the Newton's laws of motion in the first chapter.

Chapter two and three deal with the motion of system of many particles and then go to study the motion of a rigid body by considering the fact that a rigid body is a continuous case for many infinitesimal particles.

Chapter four discuss the Lagrange's equation of motion which deals with the motion of particles. In addition, the Lagrangian mechanics represent a new simple mathematical method to deal with the Hamiltonian equations in motion that is discuss in chapter five.

Chapter six and eight cover two mathematical subjects in classical mechanics were chapter six discusses the calculus of variation and chapter eight deals with the canonical transformations.

Chapter seven discusses the small oscillations which is very important to understand the microscopic subjects of physics.

Finally, this book contains many examples and many problems at the end of each chapter, which is important for the student to understand the subjects of classical mechanics deeply.